

HELSINGIN KAUPPAKORKEAKOULU



HISTORIAALLISET VOLATILITEETTIMALLIT JA IMPLISIITTINEN  
VOLATILITEETTI PARAMETRISSESSA VALUE-AT-RISK ESTIMOINNISSA

HELSINGIN  
KAUPPAKORKEAKOULUN  
KIRJASTO

9089

Kansantaloustieteen  
pro gradu -tutkielma  
Jari Pusa  
kevät 2003

Kansantaloustieteen \_\_\_\_\_ laitoksen  
laitosneuvoston kokouksessa 19 / 5 20<sup>03</sup> hyväksytty  
arvosanalla erinomainen (90 p.)  
KTT Roy Dahlstedt prof. Juuso Välimäki

## HISTORIAALLISET VOLATILITEETTIMALLIT JA IMPLISIITTINEN VOLATILITEETTI PARAMETRISSESSA VALUE-AT-RISK ESTIMOINNISSA

### Tutkimuksen tavoitteet

Tutkimuksen tavoitteena on selvittää erilaisten historiallisten volatiliteettimallien sekä implisiittisen volatiliteetin ennustuskäytännön ja tutkia ennuste-erojen vaikutuksia parametrisessa Value-at-Risk estimoinnissa. Tarkoituksena on tuoda esille rahoitusmarkkinoiden volatiliteetin erityispiirteitä ja rakentaa malleja, jotka huomioivat nämä havaitut piirteet. Tarkastelussa huomioidaan myös tuottojakauman korkeammat momentit ja selvitetään normaali-jakaumaoletuksesta aiheutuvien virheiden merkitystä riskienhallinnassa.

### Lähdeaineisto ja tutkimusmenetelmät

Tutkimusaineistona käytetään Nasdaq-100 indeksin tuottoja ajanjaksolta 1998-2002. Nasdaq-100 indeksin tulevan volatiliteetin ennustamisessa hyödynnetään VXN volatiliteetti-indeksin tarjoamaa informaatiota. Yksinkertaiseksi historialliseksi vertailumalliksi valitaan liukuvan keskiarvon menetelmä (MA). Volatiliteetin jaksollisuuden huomioimiseksi estimoidaan kaksi GARCH-mallia. Ensimmäinen malli estimoidaan tarkastelujaksoa edeltäneeltä viiden vuoden periodilta ja toinen malli varsinaiselta havaintojaksolta. GARCH-mallien rinnalla volatiliteettia ennustetaan myös Riskmetricsin EWMA-mallilla. Asymmetrisen volatiliteetin malleista estimoidaan EGARCH- sekä GJR-mallit.

### Tulokset

Asymmetrisen volatiliteetin mallien estimoinnissa ei onnistuttu rakentamaan mallia, joka olisi poistanut neliöityjen virhetermien autokorrelaation, minkä vuoksi malleja ei voitu käyttää. Ennustuskäytännön testattaessa havaittiin, ettei yksikään ennustusmenetelmä tuota täysin harhattomia ennusteita. Implisiittinen volatiliteetti osoittautuu olevan vähiten harhainen ennustusmenetelmä, jonka ennusteet näyttävät olevan myös selvästi tarkimpia. VaR-estimoinnissa GARCH sekä implisiittisen volatiliteetti tuottavat konservatiivisimpia ennusteita. Tarkkuuden osalta edellä mainitut mallit yliarvioivat tulevaa markkinariskiä, kun MA sekä EWMA osoittautuivat tuottavan tilastollisesti merkitsevän tarkkoja VaR-estimaatteja. Yliarvioinnin osoitettiin johtuvan jakauman vasemman hännän ohuudesta, mikä on rahoitusmarkkinoilla melko poikkeuksellista. VaR-ennusteiden tehokkuutta mitattiin ennusteiden ja toteutuneiden tuottojen välisellä korrelaatiolla. Tulokset osoittavat, ettei yksikään menetelmä tuota ennusteita, jotka korreloisivat tuottojen kanssa merkitsevästi.

### Avainsanat

volatiliteettimalli, implisiittinen volatiliteetti, value-at-risk



## Sisällysluettelo

<b>1. Johdanto .....</b>	<b>1</b>
1.1. Tutkimuksen tausta.....	1
1.2. Tutkimuksen tavoite .....	2
<b>2. Value at Risk .....</b>	<b>3</b>
2.1. VaR käsitteenä.....	3
2.2. Parametrinen menetelmä .....	4
2.3. Historiallinen simulointi.....	5
2.4. Monte Carlo simulointi .....	6
2.5. Extreme Value -menetelmä .....	7
2.6. Menetelmien arviointikriteerit ja käytettävän menetelmän valinta .....	8
<b>3. Rahoitusmarkkinatuottojen erityspiirteet ja niiden mallinnusmenetelmät.....</b>	<b>11</b>
3.1. Volatiliteetti rahoitusmarkkinoiden aikasarjoissa .....	11
3.2. Mallinnuksen metodologia .....	15
3.3. Liukuvan keskiarvon menetelmä.....	17
3.4. Heteroskedastisuuden sallivat mallit.....	19
3.4.1. ARCH-mallit .....	19
3.4.1.1. ARCH(q)-malli.....	20
3.4.1.2. GARCH(p,q)-malli.....	21
3.4.1.3. Asymmetrisen volatiliteetin mallit.....	25
3.4.2. Eksponentiaalinen liukuvan keskiarvon (EWMA) menetelmä .....	26
3.5. Heteroskedastiset mallit volatiliteetin ennustamisessa ja riskienhallinnassa .....	28
3.6. Implisiittinen volatiliteetti .....	32
3.7. Vinous ja huipukkuus rahoitusmarkkinoiden aikasarjoissa .....	36
<b>4. Markkinadata ja mallien estimointi.....</b>	<b>41</b>
4.1. Nasdaq-100 indeksi .....	41
4.2. GARCH-mallien estimointi.....	44
4.3. VIX indeksi.....	49

<b>5. Tulokset .....</b>	<b>51</b>
5.1. Volatiliteetin ennustaminen.....	51
5.2. Volatiliteettimallit VaR-estimoinnissa .....	54
5.2.1. Konservatiivisuus .....	54
5.2.2. Tarkkuus .....	56
5.2.3. Tehokkuus .....	59
 <b>6. Johtopäätökset .....</b>	 <b>62</b>
 <b>Lähteet.....</b>	 <b>65</b>

## **Liitteet**



## 1. Johdanto

### 1.1. Tutkimuksen tausta

1990-luvun puolivälissä uutisoitiin useita konkurssseja, jotka johtuivat yksittäisen työntekijän markkinariskin virhearvioinnista. Nick Leesonin asettamat valtavat johdannaispositiot Aasiassa ajoivat Barings pankin konkurssiin vuonna 1995. Vuotta aiemmin Orange Countyn diileri teki suuren sijoituksen hyvin korkoherkkiin johdannaisiin. Koron nousun myötä piirikunta koki \$1.7 miljardin tappion, mikä johti kunnan konkurssiin.

Riskienhallintamenetelmiä oli kehitelty jo 1970-luvulla, mutta varsinainen läpimurto koettiin vuonna 1994 J.P. Morganin käyttämän RiskMetrics™ menetelmän myötä. Tämän pohjalta on Value-at-Risk (VaR) käsite saanut muotonsa, ja nykyään se on keskeisin markkinariskin mittari. Muun muassa pankkien riskienhallinnan yhdenmukaistamiseksi laaditut Basel-säännökset vaativat pankkien raportoivan päivittäin 99% VaR-lukuja (Basel Committee on Banking Supervision 1996).

Yleistäen voisi sanoa, että VaR-lukuja määritettäessä on tavoitteena konstruoida portfolion tulevista tuotoista jakauma, jonka avulla pyritään varautumaan jakauman vasemman häntäpään tulemiin eli tappioihin. Periaatteessa siis riittää, että pystymme generoimaan jakauman hännän.

Yksinkertaisissa parametrisissä VaR:n estimointimenetelmissä tuotot oletetaan normaalijakautuneiksi, eikä jakauman korkeampia momentteja - vinoutta ja huipukkuutta - huomioida lainkaan. Tämä johtaa rahoitusmarkkinoilla väistämättä epätarkkoihin VaR lukuihin, sillä empiiriset jakaumat ovat huipukkaita ja vinoja. Mittausvirheet näkyvät käytännössä siinä, että yritykset sitovat liikaa pääomaa, mikä johtaa pääoman tehottomaan käyttöön ja osakkeenomistajien tyytymättömyyteen. Toisaalta jos VaR-lukuja aliarvioidaan, altistutaan riskille, että yritys kokee suuremman tappion kuin mihin sillä on varaa.

Huipukkuus johtuu tuottosarjan ehdollisesta heteroskedastisuudesta, jonka on osoitettu olevan yleinen ilmiö globaaleilla rahoitusmarkkinoilla. Heteroskedastisuuden sallivia aikasarjamalleja

on kehitelty Englen (1982) esittämän ARCH-mallin jälkeen lukuisia erilaisia versioita. Volatiliteettimallit estimoidaan kuitenkin historiasta, joten niiden stabiilius voidaan asettaa kyseenalaiseksi, jos markkinoilla tapahtuu suuria ja nopeita muutoksia. Vaihtoehtoisesti voidaan miettiä, tarjoaisiko markkinoiden odotus tulevasta volatiliteetista uutta informaatiota historiallisiin menetelmiin verrattuna. Markkinoiden odottamaa volatiliteettia voidaan arvioida option hinnasta lasketusta implisiittisestä volatiliteetista.

Jakauman vinous johtuu volatiliteetin asymmetriasta. Asymmetrian syitä on tutkittu ja useita selityksiä on esitetty, mutta konsensusta tärkeimmistä vaikuttavista tekijöistä ei ole löydetty. Tuottojakaumien vinous säilyy taloustieteessä siis edelleen tilastollisena ilmiönä, jota yritetään ekonometrisilla työkaluilla mallintaa. Asymmetrisen volatiliteetin malleista on parhaita tuloksia saavutettu Nelsonin (1991) EGARCH-mallilla sekä Glostenin ym. (1993) GJR-mallilla.

## 1.2. Tutkimuksen tavoite

Tutkimuksen tärkeimpänä tavoitteena on selvittää erilaisten volatiliteettiestimaattien merkitystä riskienhallinnassa. Tutkin eroja homoskedastisen- ja heteroskedastisen prosessin väliltä, jota varten estimoidaan aineistosta heteroskedastisuuden salliva GARCH-malli, sekä sopiva asymmetrisen volatiliteetin malli. Vertailumenetelmänä käytetään naiivin liukuvan keskiarvon antamaa volatiliteettia, jonka jälkeen eri menetelmien antamia ennusteita sovelletaan VaR-estimointiin. Huomionarvoista on, että kaikissa menetelmissä volatiliteetti on riippuvainen aikaisemmasta historiastaan.

Tämän jälkeen tarkastelen implisiittistä volatiliteettia, jonka voidaan katsoa edustavan markkinoiden odotusta tulevasta volatiliteetista. Arbitraasiehtojen täytyessä voidaan todeta, että tehokkailla markkinoilla implisiittisen volatiliteetin tulisi tarjota paras estimaatti tulevasta vaihtelusta. Haluan kuitenkin korostaa, ettei tutkimuksen tavoitteena ole ottaa kantaa markkinoiden tehokkuuteen, sillä yhteishypoteesiongelman tekee päättelystä erittäin hankalan. Jos nimittäin jompikumpi historiallisista volatiliteeteistä tarjoaisikin tarkemman estimaatin kuin implisiittinen volatiliteetti, niin on mahdollista, että ehkä markkinat eivät hinnoittelekaan optioita



kuten olen oletanut. Voi olla, että on olemassa joku parempi hinnoittelumalli. Tarkoituksena on siis toisessa vaiheessa selvittää ainoastaan historiallisten volatiliteettimallien ja markkinoiden odottaman volatiliteetin vaikutusta VaR-estimaattien tarkkuuteen. Implisiittisenä volatiliteettina käytän VXN volatiliteetti-indeksiä, eli tutkimuksessa ei tulla määrittämään volatiliteettia yksittäisten optioiden hinnoista. Volatiliteetti-indeksit ovat erittäin käyttökelpoisia, sillä niiden antama estimaatti ei ole yhtä herkkä mittausvirheille kuin yhdestä instrumentista laskettu implisiittinen volatiliteetti. On kuitenkin huomautettava, että volatiliteetti-indeksit ovat tutkimusta tehdessä vielä melko harvinaisia, joten tulosten yleistettävyyks eri markkinoille tai toisiin rahoitusinstrumentteihin on melko rajattua.

## 2. Value at Risk

### 2.1. VaR käsitteenä

Perinteisenä markkinariskin mittarina pidetään tuottojen keskihajontaa eli volatiliteettia. Volatiliteetti kertoo kuitenkin ainoastaan tuottojen vaihtelusta, eikä anna minkäänlaista rahallista ennustetta tappioiden suuruudesta. Kun pystymme konstruoimaan tuotoista todennäköisyysjakauman, voimme tehdä absoluuttisia arvioita siitä millä todennäköisyydellä kohtamme mitenkkin ison tappion. Tämä on juuri VaR:n idea. VaR pyrkii antamaan yritykselle arvion tarkastellun periodin maksimitappioista tietyllä vaaditulla todennäköisyydellä. Voidaan puhua esimerkiksi 95% VaR:sta, mikä kertoo yrityksen kohtaaman mahdollisen maksimitappion 95% todennäköisyydellä. Voimme myös ajatella toisinpäin, jolloin 5% todennäköisyydellä tappio on suurempi kuin mitä on ennakoitu. Tilastotieteessä saman pisteen kahdesta tulkinnasta käytetään termejä prosenttipiste ja fraktiili. VaR:sta puhuttaessa on prosenttipisteen optimistisempi näkökulma vakiintunut standardiksi.

Mikäli perustamme riskienhallinnan 95% VaR-estimaatteihin on sadan päivän ajanjaksolla viitenä päivänä odotettavissa reservipääoman ylittävä tappio. Näihin äärihavaintoihin varauduttaessa olisi tärkeä saada jonkinlaisia arvioita tappioiden suuruudesta. Tällaista



informaatiota ei VaR pysty tuottamaan. Vaihtoehtoisesti voimme analysoida jakauman vasenta häntää niin kutsutun ehdollisen VaR:n (CVaR) avulla.

$$CVaR = E(L \mid L > VaR), \quad (2.1)$$

jossa  $L$  kuvaa VaR:n ylittäviä tappioita. CVaR antaa siis arvion todennäköisimmästä ääritappiosta ja on näin ollen selkeästi informatiivisempi mittari tappioiden suuruuden ennakkoinnissa. CVaR on myös melko helppo laskea. Se voidaan määrittää jakauman hännän VaR-lukujen keskiarvona seuraavasti:

$$CVaR = \frac{\sum_{i=1}^n VaR_i}{n}, \quad (2.2)$$

Hyödyllisyydestä huolimatta on CvaR saanut akateemisissa tutkimuksissa yllättävän vähän huomiota. Niin ikään Basel-säännöksetkään eivät vaadi pankkien raportoivan CVaR-estimaatteja. Informatiivisuuden ja helpon määritettävyyden perusteella tuntuisi perustellulta nostaa CVaR-käsite volatiliteetin ja VaR:n rinnalle kolmanneksi markkinariskin mittariksi.

## 2.2. Parametrinen menetelmä

Parametrisen menetelmän johtavana ajatuksena on estimoida VaR jakaumasta, jonka kertymäfunktio  $f(x)$  on ennalta tunnettu. Luottamustasolla  $\alpha$  voidaan parametrinen VaR määrittellä seuraavasti:

$$\int_{-\infty}^{-VaR} f(x) dx = \alpha \quad (2.3)$$

Kun jakauma tunnetaan on ainoa tehtävä estimoida sille tarvittavat parametrit. Nopein ja yksinkertaisin tapa määrittää VaR on olettaa tuotot normaalijakautuneiksi ja lineaarisiksi. Tällöin

VaR voidaan määrittää keskihajonnan funktiona. Kun siis tiedämme portfolion keskihajonnan, voimme estimoida VaR-pisteet normaalijakaumasta seuraavasti:

$$VaR_t = -\mu Wt - \alpha W\sigma\sqrt{t}, \text{ missä} \quad (2.4)$$

$\mu$  = tuottojen odotusarvo,  $\sigma$  = tuottojen keskihajonta,  $W$  = portfolion arvo alussa,  $\alpha$  = luottamustaso,  $t$  = periodin pituus vuosissa.

Päivittäisiä VaR-lukuja laskettaessa tuottojen odotusarvo on hyvin lähellä nollaa, joten yhtä hyvin voidaan käyttää myös suhteellista VaR-lukua

$$VaR_t = -\alpha W\sigma\sqrt{t} \quad (2.5)$$

Kaavoista (2.4) ja (2.5) nähdään, että tuottoja skaalataan eri ajanjaksoille lineaarisesti kertoimella  $t$ . Jos portfoliossa on instrumentteja joiden tuotot eivät ole lineaarisia, kuten optioita ja korkotuotteita, joudumme approksimoimaan muutosta Taylorin sarjakehitelmällä. Tätä kutsutaan delta-normaaliksi menetelmäksi (Dowd 2001, 66)

### 2.3. Historiallinen simulointi

Parametrisessä menetelmässä joudutaan heti suuriin vaikeuksiin, jos portfolion tuotot eivät jakaudukaan niinkuin on oletettu. Historiallinen simulointi poistaa tämän ongelman, sillä nyt käytämme portfolion historiallista jakaumaa estimointiperiodin jakaumana. Koska menetelmässä replikoidaan portfolion aikaisempaa kehitystä, emme joudu estimoimaan portfolion arvopapereiden variansseja korrelaatioita.

Aineiston historiallisuus luo kuitenkin omat ongelmansa, sillä vaikka menetelmässä ei olla riippuvaisia jakauman muodosta muodostuu riippuvuus nyt käytettyä historiallista periodia kohtaan. Mikäli estimointiperiodi on ollut tavallisuudesta poikkeava, tuottaa historiallinen



simulointi harhaisia estimaatteja. Tämä on hyvin tavallista silloin, jos estimointiperiodi on ollut liian lyhyt, jolloin jakauma saa liikaa vaikutteita markkinoiden lyhyen ajan shokeista. Toisaalta estimointiperiodi ei saa olla liian pitkäkään, sillä tällöin jakauma sisältää liikaa vanhaa tietoa, eikä pysty vastaamaan markkinoiden viimeaikaiseen dynamiikkaan.

Historiallisen simuloinnin ehdoton vahvuus on riippumattomuus mistään oletusjakaumasta. Sen onkin todettu tuottavan luotettavampia tuloksia kuin parametrisen menetelmän erityisesti silloin, kun kyseessä on portfolio, jonka tuotot poikkeavat normaalijakaumasta.

#### 2.4. Monte Carlo simulointi

Monte Carlo simulointi on menetelmä, jolla voidaan jäljitellä tutkittavan portfolion prosessia. Jos pystymme määrittämään portfolion kehitystä kuvaavan stokastisen prosessin, voimme satunnaislukuja generoimalla simuloida erilaisia tulemia. Simuloinnin jälkeen valitsemme prosessista saman ajankohdan arvoja kaikista simulaatiosta ja konstruimme arvoista jakauman. Tämän jälkeen voimme estimoida VaR:n syntyneestä jakaumasta.

Prosessin valinnassa on oltava huolellinen, sillä menetelmän tarkkuus riippuu vahvasti valitusta prosessista. Osakkeen hintaprosessin simuloinnissa käytetään tavallisesti geometristä Brownin liikettä, mutta esimerkiksi korkoprosessin simuloinnissa on valinta huomattavasti mutkikkaampaa. Tämä johtuu siitä, että korkomarkkinoilla käydään tavallisesti kauppaa pienemmillä marginaaleilla, minkä vuoksi pienikin virhe korkoprosessin simuloinnissa voi olla kohtalokas.

Simuloinnin toteuttaminen on myös huomattavasti työläämpää kuin kahdessa edellisessä menetelmässä. Tämän vuoksi Monte Carlo simulointia käytetään pääasiassa vain silloin, kun on tavoitteena estimoida monimutkaisten portfolioiden VaR-lukuja. Tällaisten portfolioiden kokonaisriski saattaa muodostua monista muistakin riskimuuttujista kuin volatilitteetistä (Dowd 1998, 109). Siinä missä historiallisessa simuloinnissa replikoitiin koko portfolion aikaisempaa kehitystä, on Monte Carlo menetelmä edistyneempi siinä mielessä, että sillä voidaan simuloida



yksittäisten instrumenttien erilaisia jakaumia, ja tutkia niistä muodostuvaa yhteisjakaumaa. Pystymme siis huomioimaan portfolion eri tuotteisiin liittyviä erilaisia riskejä.

Theoret & Rostan (2000) tekivät vertailututkimuksen Monte Carlo (MC) simuloinnista ja historiallisesta simuloinnista. VaR laskettiin kuvitteellisen Yhdysvaltalaisen sijoittajan portfoliosta, joka koostui Kanadan valtion 10 vuoden velkakirjoista. Näin portfolio siis altistui sekä valuuttakurssiriskille että korkoriskille. Toteutuneisiin tuottoihin verrattaessa havaittiin MC-simuloinnin päätyneen hieman tarkempiin VaR-lukuihin kuin historiallisen simuloinnin. Täytyy kuitenkin muistaa, että historiallinen simulointi on hyvin helppo ja nopea toteuttaa toisin kuin MC-simulointi, joten ratkaistavaksi tulee valinta käytännöllisyyden ja menetelmän tarkkuuden väliltä.

## 2.5. Extreme Value -menetelmä

Parametrisessä menetelmässä oletusjakaumat saattavat ennustaa hyvinkin tarkasti tulevia tuottoja. Kuitenkin niinä harvoina kertoina kun kohdataan ääripään tappio, saattavat perinteiset jakaumat antaa virheellisiä tuloksia, eli juuri silloin kun riskienhallinnan merkitys korostuu enemmän kuin koskaan. Extreme Value (EV) -menetelmä keskittää kaiken huomion jakauman häntäpään estimointiin. Se ei ota kantaa siihen mikä on tuottojen odotusarvo tai keskiarvo, vaan siihen mikä on äärihavaintojen keskiarvo ja keskihajonta.

EV-teorialla voidaan osoittaa, että otoskoon kasvaessa sen äärihavainnot lähestyvät jotain tiettyä EV-jakaumaa. Rahoitusmarkkinoilla on äärihavaintojen havaittu lähestyvän Fréchet jakaumaa, jonka tiheysfunktio on

$$H_{\xi, \mu, \sigma}(x) = \exp(-[1 + \xi(x - \mu) / \sigma]^{-1/\xi}) \quad (2.4)$$

missä  $\mu$  = äärihavaintojen keskiarvo,  $\sigma$  = äärihavaintojen keskihajonta,  $\xi$  = häntäindeksi ( $\xi > 0$ ) (Dowd 2000)

On tyypillistä, että äärihavaintojen otoskoko on pieni, sillä esimerkiksi tuhannen havainnon tuottosarjasta saadaan vain muutama kymmenen äärihavaintoa. Tällä on luonnollisesti vaikutusta keskilukujen tarkkuuteen, mutta VaR-viitekehyksessä pieni otoskoko vaikeuttaa eniten häntäindeksin estimointia. Häntäindeksin suuruus vaikuttaa Fréchet-jakauman paksuuteen, joten VaR:n tarkkuus riippuu siitä kuinka tarkasti olemme onnistuneet estimoimaan häntäindeksin.

Danielsson & Morimoto (2000) tutkivat EV-menetelmän tehokkuutta verraten sitä perinteisiin parametrisiin menetelmään. Tutkijat raportoivat, että EV-menetelmän ennusteet Japanin osakemarkkinoilta olivat tarkempia ja estimaattien varianssin havaittiin olevan pienempää.

Manganelli & Engle (2001) esittävät negatiivista kritiikkiä mallia kohtaan nostamalla esille EV:n oletuksen havaintojen riippumattomuudesta, mikä on ristiriidassa empiiristen havaintojen kanssa. He korostavat myös, että menetelmän on osoitettu tuovan lisätarkkuutta vain hyvin korkeilla luottamustasoilla.

## 2.6. Menetelmien arviointikriteerit ja käytettävän menetelmän valinta

VaR-estimaattien ja eri menetelmien arviointiin ei ole tähän mennessä kehitetty yhteisiä standardeja. Valtaosassa tutkimuksista tarkastelu perustuu lähes yksinomaan menetelmien tarkkuuden vertailuun, jossa lasketaan VaR-ennusteen ylittävien toteutuneiden havaintojen lukumäärä. Tarkkuus on toki tärkein VaR-estimaateilta vaadittava ominaisuus, mutta voittoa tuottavan yrityksen täytyy asettaa VaR:lle myös lisävaatimuksia. Engel & Gizycki (1999) tähdentävät, että yritysten tulisi valita sellainen VaR:n estimointimenetelmä, jonka estimaatit ovat riittävän tarkkoja, minimoivat reservipääoman määrän ja korreloivat tuottojen kanssa.

Yrityksillä on usein käytössään laaja valikoima erilaisia rahoitusinstrumentteja. Jos joku VaR-menetelmä toimii yhdellä instrumentilla, ei se välttämättä toimi toisella. Näin ollen olisi tärkeää löytää sellainen menetelmä, joka tuottaa riittävän tarkkoja ennusteita kaikille instrumenteille, sillä eri menetelmien käyttö eri instrumenteille aiheuttaa suuria kustannuksia.



Engel & Gizycki (1999) perustavat estimointimenetelmien tarkastelun kolmeen kriteeriin. Ensimmäinen kriteeri on menetelmän konservatiivisuus, mikä mittaa markkinariskiennusteiden suuruutta ja vaihtelevuutta. Mitä suurempia ja vakaampia VaR-ennusteita menetelmä tuottaa muihin menetelmiin verrattuna, sitä konservatiivisemmasta menetelmästä on kyse. Konservatiivisten ennusteiden vaihtelu on pientä, jolloin reservipääoman muutokset ovat pienempiä ja harvinaisempia kuin vähemmän konservatiivisessa menetelmässä. Kaupankäyntikustannukset ovat näin ollen pienempiä, mutta suuremman reservipääoman vaihtoehtoiskustannus on suurempi.

Toisena kriteerinä on menetelmän tarkkuus, jonka mittarina voidaan käyttää tarkastelujakson aikana havaittujen VaR:n ylitysten määrää suhteessa jakson havaintojakson pituuteen. Jos käytetään 99% VaR-lukua, tulisi tarkassa menetelmässä VaR:n ylitysten määrän olla lähellä yhtä prosenttia. Engel & Gizycki (1999) mittasivat myös suurimman ylityksen suhdetta VaR-estimaattiin, mistä heijastuu osaltaan toteutuneen tuottojakauman vasemman hännän pituus, ja se kuinka hyvin VaR on huomioinut sen. Engel & Gizycki (1999) havaitsivat, että kun parametriseen menetelmään lisättiin ajankohdalle ehdollista varianssia mallintava GARCH-malli, päästiin 95% VaR:ssa hieman suurempaan tarkkuuteen. Huomionarvoista on myös, että Extreme Value menetelmä erottautui 99% pisteessä tarkkuudellaan edukseen muista malleista.

Kolmantena kriteerinä käytetään menetelmien tehokkuutta. Konservatiivinen VaR saattaa olla tarkka mutta ei välttämättä tehokas, jos se ei sopeudu eri markkinatilanteisiin. Vastaavasti hieman epätarkempi VaR on tehokkaampi, jos se korreloi toteutuneiden tuottojen kanssa ja seuraa näin markkinoiden kehitystä. Mikäli VaR:n ja tuottojen välillä on negatiivinen korrelaatio, viestii tämä yrityksen johdolle ja osakkeenomistajille tehottomasta pääoman allokoinnista. On melko todennäköisistä, että menetelmä on tällöin myös epätarkka. Jos korrelaatiota ei esiinny, voidaan todeta, että menetelmä ennustaa reservipääoman kasvua tappiopäiviksi noin 50% todennäköisyydellä. Mikäli korrelaatio on positiivista, on todennäköisempää, että reservipääoman muutokset ovat markkinoiden kanssa oikeansuuntaisia.

Engel & Gizycki (1999) tarkastelivat työssään edellä esiteltyjä yksinkertaisia VaR:n estimointimenetelmiä sekä niistä johdettuja monimutkaisempia malleja. Tutkijat havaitsivat, että



näiden kolmen kriteerin perusteella ei voida selkeästi nostaa yhtä menetelmää muita ylemmäs. He raportoivat myös, että rahoitusinstituutioiden riskienhallintamenetelmät on tyypillisesti parametrinen menetelmän, historiallisen- tai Monte Carlo simuloinnin, tai Extreme Value-menetelmän yksinkertaisia versioita. Näitä yksinkertaisia malleja tarkasteltaessa havaittiin historiallisen simuloinnin yltävän muita parempiin tuloksiin tehokkuuden ja tarkkuuden osalta.

Basel-säännökset vaativat pankkien raportoivan päivittäin 99% VaR-lukuja, jotka on laskettu kymmenen päivän sijoitushorisontille (Basel Committee on Banking Supervision 1996). Käytettävä menetelmä on pankkien vapaasti valittavissa. Ainoa vaatimus on, että menetelmä tuottaa riittävän tarkkoja arvioita kunkin rahoitusinstrumentin markkinariskistä. Käytännössä olisi siis mahdollista käyttää eri menetelmiä eri instrumenteille. Engel & Giszky (1999) kuitenkin korostavat, että pankit käyttävät yleensä vain yhtä menetelmää kaikille instrumenteille.

Danielsson ym. (2001) esittävät, että VaR:n valitseminen pankkien riskienhallinnan yhteiseksi standardiksi saattaa johtaa markkinoilla pankkijärjestelmän epävakauteen. He perustelevat väitettään sillä, että yhteinen riskienhallintamenetelmä ja sen mukanaan tuomat standardit tekevät pankeista ja rahoituslaitoksista liian homogeenisia, jolloin moni vähemmän riskiä karttava toimija joutuu muuttumaan riskiä karttavammaksi toimijaksi. Tämä huonontaa rahoitusmarkkinoiden likviditeettiä, sillä laskevien kurssien aikana kaikki toimijat joutuvat myymään arvopaperinsa yhteisten riskienhallintastandardien pakottamina. Ilman valvontaa riskineutraalimpi toimija voisi vastaavassa markkinatilanteessa pysyä vielä ostokannalla. Danielsson ym. (2001) korostavat, etteivät he argumentoi valvontaa vastaan, vaan tarkoituksena on herättää keskustelua VaR:n tai muun vastaavan riskimittarin taloudellisista vaikutuksista pankkien riskienhallinnan valvonnassa.

Työni tärkein raja-alue koskee VaR-estimointimenetelmän valintaa. Koska tutkimuksen tavoitteena on tutkia erityyppisten volatilititeetti-ennusteiden vaikutusta riskienhallinnassa, on järkevää valita tarkasteluun jakauma, johon voidaan soveltaa kaikki tutkittavia volatilititeettiestimaatteja. Myöhemmin esiteltävän implisiittisen volatilititeetin taustalla on oletus log-normaaleista tuotoista, joten esimerkiksi t-jakauman käyttö heikentäisi ennusteiden vertailtavuutta. Näiden seikkojen vuoksi käytän tutkimuksessa normaalijakaumaan perustuvaa parametrista menetelmää.



### 3. Rahoitusmarkkinatuottojen erityispiirteet ja niiden mallinnusmenetelmät

#### 3.1. Volatiliteetti rahoitusmarkkinoiden aikasarjoissa

Useissa tutkimuksissa, lähtien jo Faman (1965) havainnoista, on rahoitusmarkkinoiden tuottojen osoitettu olevan korreloimattomia mutta ei riippumattomia. Mikäli neliöityjen tuottojen aikasarjasta löytyy tilastollisesti merkitsevää autokorrelaatiota, voimme todeta että prosessissa on ajankohdalle ehdollista vaihtelua eli heteroskedastisuutta.

Schwert & Seguin (1990) tutkivan Yhdysvaltojen osakemarkkinoiden tuottojen vaihtelua 60 vuoden periodilta ja osoittivat volatiliteetin vaihtelun riippuvan ajasta. Corhay & Rad (1994) raportoivat samansuuntaisia tuloksia Euroopasta, kun aineistona käytettiin Alankomaiden, Iso-Britannian, Italian, Ranskan ja Saksan keskeisiä osakeindeksejä. Huomionarvoista on, että nollahypoteesi homoskedastisuudesta hylätiin kaikkien maiden osalta 1% merkitsevyystasolla. Santis & Imrohoroglu (1997) tekivät vertailututkimuksen kehittyvien markkinoiden volatiliteetista ja niiden ehdollisesta heteroskedastisuudesta. He vertasivat 15 pääosin Latinalaisen Amerikan ja Aasian markkinoiden volatiliteettia Euroopan, Japanin ja Yhdysvaltain markkinoihin, ja havaitsivat volatiliteetin olevan suurempaa kehittyvillä markkinoilla. Tämä tulos ei liene suurikaan uutinen, mutta tulokset osoittivat myös volatiliteetin vaihtelevan ajassa voimakkaammin suurempiin markkinoihin verrattuna. Näihin tutkimuksiin nojautuen voidaan todeta, että heteroskedastisuus on rahoitusmarkkinoilla globaali ilmiö.

Volatiliteetin jaksollisuus herättää luonnollisesti kysymyksen, että onko sitä mahdollista mallintaa ja voiko ennusteista hyötyä markkinoilla. Volatiliteetin mallintaminen osakemarkkinoilla ei riko Faman hypoteesia tehokkaista markkinoista, sillä mallien antamat ennusteet eivät paranna tason eli hintojen ennustettavuutta. Volatiliteettimalleilla pystymme sitä vastoin antamaan arvion siitä, onko tuottojen tuleva vaihtelu suurta vai pientä. Emme tiedä mihin suuntaan hinta liikkuu, voimme vain ennustaa vaihtelun suuruutta. Johdannaismarkkinoilla tilanne on toinen. Koska optioiden hinta määräytyy volatiliteetin määräämänä, on onnistuneilla ennustuksilla ja oikean volatiliteettimallin käytöllä mahdollisuus tehdä arbitraasivoittoja, ja jos arbitraasi ei poistu, rikkoutuu tällöin oletus tehokkaista markkinoista. Optiohinnoittelumalleihin



liittyy kuitenkin monia heikkouksia, joita esitän luvussa 3.6. Näiden heikkouksien perusteella voidaan todeta, että onnistuneet volatiliteettiennusteetkaan eivät välttämättä riko tehokkaiden markkinoiden hypoteesia johdannaismarkkinoilla.

Jaksollisuuden lisäksi toinen tyypillinen ominaisuus on volatiliteetin hakeutuminen keskiarvoon. Tämä tarkoittaa sitä, että vaikka tuottoprosessin vaihtelussa esiintyy jaksollisuutta, pyrkii prosessi kuitenkin hakeutumaan pitkän aikavälin keskiarvoon. (Engle 2001)

Rahoitusmarkkinoiden tutkimuksessa on shokeilla havaittu olevan asymmetrinen vaikutus volatiliteettiin. Useat tutkijat ovat raportoineet tuloksia, joiden mukaan volatiliteetin ja tuottojen välillä on negatiivinen riippuvuus. Yksi ilmiön selitys on velkaisuus-efekti (leverage-effect), jonka ajatuksena on, että osakkeen hinnan laskiessa yrityksen vieraan pääoman suhde omaan pääomaan kasvaa, ja yritys muuttuu velkaisemmaksi. Kuten tunnettua tämä kasvattaa riskiä konkurssista ja kasvattaa näin volatiliteettia. Empiirisissä tutkimuksissa on kuitenkin havaittu, ettei velkaisuusefekti ole riittävän hyvä asymmetrian selittäjä tiheän frekvenssin aineistoissa. Toinen ilmiön selitys pohjautuu sijoittajien riskikäyttäytymiseen (risk-premium effect). Yleisesti voidaan sanoa, että lähes kaikki uutiset kasvattavat arvopaperin volatiliteettia, jonka riskiä karttavat sijoittajat hinnoittelevat markkinaodotukseensa. Positiivisten uutisten yhteydessä hintoja nostava vaikutus syrjäytyy osittain volatiliteetin kasvun seurauksena. Sitä vastoin negatiivisten uutisten yhteydessä volatiliteetin kasvun suora vaikutus ja negatiivisen uutisen signaali vaikuttavat sijoittajan odotuksen muodostukseen samansuuntaisesti vahvistaen negatiivisen uutisen vaikutusta. Tästä seuraa, että positiivisten tuottojen yhteydessä muutokset eivät ole yhtä suuria kuin negatiivisten tuottojen jälkeen. (Chen ym., 2001)

Hong & Stein (2001) tähdentävät, että edellä mainitut tulkinnat sisältävät oletuksen edustavasta agentista, mikä on rohkea yleistys, sillä sijoittajien odotukset ovat heterogeenisia ja markkinat sisältävät usein erilaisia rajoitteita. Monilla osakemarkkinoilla ei voida harjoittaa lyhyeksimyyntiä, eli sijoittajat eivät voi myydä papereita ennen niiden ostoa. Tämä näkyy sijoittajien käyttäytymisessä siten, että pessimistiset sijoittajat eivät pysty asettamaan positioita, jos markkinahinta on korkeampi kuin heidän odotuksensa. Oletetaan, että markkinoilla on kolmenlaisia sijoittajia: optimistisia (O) ja pessimistisiä (P) fundamentteihin perustavia sijoittajia,



sekä arbitraasimotiivin omaavia sijoittajia (A). Heillä kaikilla on salkussaan samaa arvopaperia. Hetkellä  $t_0$  markkinahinta on 100, joka on P:n mielestä liian korkealla, mistä johtuen P myy arvopaperinsa. Hetkellä  $t_1$  markkinoilla käydään kauppaa vain O:n ja A:n kesken, sillä P ei pysty osallistumaan markkinoille. A:n osallistuminen markkinoille pitää kaupankäyntiä yllä, mutta muutokset eivät ole suuria. Markkinoilla tiedetään, että P ei osallistu kaupankäyntiin, mutta heidän odotustaan ei tiedetä. P:n odotus saattaa olla 90 tai se voi olla myös yhtä hyvin 50. Hetkellä  $t_2$  hinta laskee tasolle 90, jolloin P paljastaa odotuksensa alkaen ostaa arvopapereita. Voimakas kysyntä nostaa hintaa nyt voimakkaasti ylös, kunnes hinta nousee yli P:n odotuksen jolloin he poistuvat taas markkinoilta. Esimerkistä havaitaan, että lyhyeksimyytirajoitteet estävät pessimististen sijoittajien informaation näkymisen hinnoissa, mistä aiheutuu hintojen laskun yhteydessä yllättäviä hinnanvaihteluita kun markkinoilta ulkona olleiden sijoittajien odotukset paljastuvat. Hintojen noustessa vastaavaa informaation paljastumista ei tapahdu. Osa sijoittajista jättäytyy hiljalleen ulos, mutta arbitraasisijoittajat pitävät huolen siitä, ettei kaupankäynti tyrehdy täysin. Hong & Stein (2001) esittävät siis, että volatiliteetin kasvu aiheutuu tyypillisesti laskujen yhteydessä syntyvän kaupankäyntivolyymien kasvun seurauksena.

Eksogeenisten muuttujien vaikutusta volatiliteettiin on myös korostettava. Esimerkiksi muiden saman alan yritysten volatiliteetin vaihteluilla on havaittu olevan vaikutusta tarkasteltuun volatiliteettiin, jolloin selittäjää on tarkasteltava stokastisena muuttujana. Ilmiön takana voi olla myös deterministinen muuttuja, sillä volatiliteetin on näytetty riippuvan mm. makroekonomisten ennusteiden ja yrityksen oman tuloksen julkaisupäivistä. Mikäli kyseisten muuttujien ja volatiliteetin välinen relaatio on merkitsevää, voidaan muuttujat ottaa osaksi käyttämäämme volatiliteettimallia. (Engle, 2001)

Rahoitusmarkkinoiden tutkimuksessa ei niinkään enää kyseenalaisteta volatiliteetin ennustamiseen käytettyjen mallien käyttökelpoisuutta, vaan keskustelua käydään siitä kuinka pitkälle ajanjaksolle volatiliteettia voidaan luotettavasti ennustaa. (Poon & Granger, tulossa) West & Cho (1995) havaitsivat, että valuuttamarkkinoilla ennustuskyky heikkenee jo viiden päivän jälkeen. Christoffersen & Diebold (2000) tutkivat osake- ja valuuttamarkkinoita ja raportoivat volatiliteettimallien luotettavuuden heikkenevän huomattavasti 10 päivän jälkeen.

Toisaalta toiset tutkijat kuten Bollerslev & Andersen (1998) ovat onnistuneet rakentamaan luotettavia malleja myös pidemmälle horisontille. He tähdentävät otosfrekvenssin merkitystä mallia rakentaessa ja perustavat omat mallinsa tiheän frekvenssin aineistoihin. Poon & Granger (tulossa) käsittelevät erinomaisessa kirjallisuuskatsauksessaan volatilitietin mallinnuksen saavutuksia ja tulevaisuuden haasteita. He raportoivat, että markkinoiden mikrorakenteen mallintamisella saadaan huomattavasti tarkempia ennusteita kuin päivätason tai vielä harvemman frekvenssin aineistoilla. Poon & Granger (tulossa) esittävät, että esimerkiksi viiden minuutin frekvenssin aineistolla rakennettujen volatilitiettimallien selitysaste seuraavan päivän volatilitiettiä ennustettaessa on jopa 3-4 kertainen päivätason aineistosta rakennettuihin malleihin verrattuna.

Tässä tutkimuksessa tullaan estimoimaan päivittäisiä VaR-lukuja, joten mallien luotettavuuden ei edellä esitettyjen tutkimusten perusteella pitäisi *ceteris paribus* heikentyä ennustehorisontin pituuden takia.

Seuraavaksi käsittelen muutamia aikasarjaekonometrian peruskäsitteitä, millä luodaan pohja volatilitiettimallien teorian ymmärtämiselle. Sen jälkeen esittelen keskeisimmät volatilitietin ennustamiseen käytetyt menetelmät. Rajaan tutkittavaksi vain sellaisia malleja, jotka huomioivat edellä esiteltyjä rahoitusmarkkinoiden volatilitiettiltä havaittuja ominaisuuksia. Vertailun perustana käytän liukuvan keskiarvon menetelmää, joka ei huomioi mitään aikasarjan erityisominaisuuksia. Tämän jälkeen käydään läpi joukko erilaisia heteroskedastisuuden sallivia malleja. Keskeisten ARCH-mallien lisäksi tutkin myös eksponentiaalista liukuvan keskiarvon mallia.

Volatilitiettimalleista puhuttaessa on hyvä tässä vaiheessa vielä korostaa, että mallit perustuvat historiassa havaittuun käyttäytymiseen ja ovat luonnollisesti herkkiä menneisyydestä poikkeavalle dynamiikalle. Vaihtoehtoisesti voimme miettiä, että tarjoaisiko markkinoiden odottama volatilitietti tarkemman estimaatin tulevasta kehityksestä. Implisiittistä volatilitiettiä käsitellään tarkemmin luvussa 3.6.



### 3.2. Mallinnuksen metodologia

Volatiliteettimallien teorian ymmärtämisen kannalta on tärkeää hahmottaa aikasarjojen ja stokastisten prosessien välinen relaatio, sekä aikasarjojen yhteydessä käytetty terminologia.

Satunnaismuuttujan  $\tilde{y}_t$  arvot muodostavat aikasarjan  $\{y_t\}$ , jossa satunnaismuuttujan arvot ovat järjestetty aikaindeksin  $t$  mukaan nousevaan järjestykseen. Aikasarja on siis havaintojen jono, jossa termi muuttuja ymmärretään yhteisjakautuneiden satunnaismuuttujien realisaatioksi. Tämä merkitsee, että toteutuneilla havainnoilla  $y_1, \dots, y_T$  on jokin yhteisjakauma  $f_{1, \dots, T}(y_1, \dots, y_T) = f(y)$ . Jos todennäköisyysjakauma  $f(y)$  on tiedossa, voidaan havaintojonosta käyttää nimitystä *stokastinen prosessi*. Stokastisen prosessin olemassaolo on tilastollisen mallinnuksen tärkein kulmakivi, sillä prosessi antaa informaatiota havaintojen käyttäytymisestä.

Toteutuneiden havaintojen takana on joku tuntematon prosessi, jota kutsutaan *datan generoimaksi prosessiksi (DGP)*. Tilastollisen mallinnuksen ensimmäisenä vaiheena on valita jokin sopiva stokastinen prosessi kuvaamaan datan generoimaa prosessia.

Osakemarkkinoiden tehokkuushypoteesin taustalla on oletus hintojen satunnaiskulusta eli niin sanotusta *random walk* prosessista. Random walk voidaan kuvata satunnaismuuttujien  $u_t$  avulla seuraavasti:

$$y_t = u_t + u_{t-1} + u_{t-2} + \dots \quad (3.1)$$

Satunnaismuuttujien  $u_t$  muodostama havaintojono on valkoisen kohinan prosessi, jolla on seuraavat ominaisuudet:  $E[u_t] = 0$ ,  $E[u_t^2] = \sigma^2$  ja  $Cov[u_t, u_s] = 0 \quad \forall \quad s \neq t$ . Malli (3.1) voidaan muuttaa vähemmän muuttujia sisältävään rekursiiviseen muotoon

$$y_t = y_{t-1} + u_t, \quad (3.2)$$

josta havaitaan, että huomisen ennuste muodostuu ajassa korreloimattomien muuttujien summana. Voidaan sanoa, että random walk prosessilla on pitkä muisti, sillä aikaisempien havaintojen vaikutus seuraavaa arvoa ennustettaessa ei vaimene ajassa. Huomionarvoista on myös, että valkoisen kohinan prosessi on random walk prosessin ensimmäinen differenssi.

Toinen tärkeä käsite aikasarjaekonometriassa on prosessien stationaarisuus ja epästationaarisuus. Prosessi on kovarianssistationaarinen eli heikosti stationaarinen, jos se toteuttaa seuraavat ehdot:

- $E[y_t] = \mu$
  - $E[(y_t - \mu)^2] = \sigma^2 < \infty$
  - $E[(y_t - \mu)(y_{t-s} - \mu)] = \gamma_s$
- (3.3)

Prosessilla on oltava siis ajasta riippumaton äärellinen keskiarvo ja varianssi. Havaintojen välinen kovarianssi saa riippua ainostaan aikaerosta  $s$ , eikä havainnointihetkestä  $t$ . Prosessi on vahvasti stationaarinen mikäli mikään prosessin ominaisuus ei riipu ajankohdasta  $t$ . Toisin sanoen, jos otamme aikasarjasta peräkkäisiä havaintoja, täytyy vahvasti stationaarisessa prosessissa jokaisen havainnon olla samasta jakaumasta. Kovarianssistationaarisessa prosessissa on mahdollista, että joku havainto poimitaan positiivisesti vinosta jakaumasta ja toinen havainto negatiivisesti vinosta jakaumasta. On kuitenkin syytä korostaa, että vahva stationaarisuus ei vaadi jakauman kaikkien momenttien - keskiarvon, varianssin, vinouden ja huipukkuuden - olevan määriteltyjä tai äärellisiä. Tällöin on mahdollista, että prosessi on vahvasti mutta ei heikosti stationaarinen. Epästationaarisesta sarjasta puhutaan silloin, jos sarja ei ole heikosti eikä vahvasti stationaarinen, josta hyvänä esimerkkinä toimii edellä esitelty random walk prosessi, jonka odotusarvo ei ole vakio. Prosessia kutsutaan kuitenkin differenssistationaariseksi, sillä se voidaan muuntaa stationaariseksi differoimalla.

Aikasarjamalleja rakennettaessa on tärkeää muokata aikasarjat stationaarisiksi, sillä muuten tulokset saattavat olla virheellisiä. Kahra & Kanto (1999) esittävät, että epästationaaristen muuttujien kohdalla saatetaan saada hyvinkin korkeita regressiokertoimien arvoja, vaikka muuttujat olisivat täysin riippumattomia. Kyseistä ilmiötä kutsutaan valeregressioksi.



Stationaarisuuden karkeaa arviointia voidaan tehdä aikasarjan kuvaajasta tai autokorrelaatiofunktioista. Stationaarisessa aikasarjassa ei esiinny trendiä, vaan prosessi pyrkii hakeutumaan keskiarvoon. Autokorrelaatiofunktiossa korrelaation tulisi vaimentua asymptoottisesti mikäli prosessi on stationaarinen. Stationaarisuutta voidaan testata myös tilastollisesti, johon Kahra & Kanto (1999) suosittelevat Dickey-Fuller testiä.

Kolmas keskeinen käsite, jolle volatilitteettimallit rakennetaan, koskee varianssin ehdollisuutta. Mikäli prosessin varianssi ei ole ajankohdan  $t$  funktio, sanotaan prosessia homoskedastiseksi. Kuten edellä osoitimme, on rahoitusmarkkinoiden aikasarjoissa havaittavissa ajankohdalle ehdollista volatilitteettia, mikä näyttäisi rikkovan kovarianssistationaarisuuden ehtoja. On kuitenkin huomattava, että ehdollisesti heteroskedastinen sarja voi olla myös kovarianssistationaarinen, mikäli sarjan pitkän aikavälin varianssi on vakio.

### 3.3. Liukuvan keskiarvon menetelmä

Yksinkertaisin varianssin estimointimenetelmä - liukuvan keskiarvon menetelmä - arvioi tulevaa vaihtelua aikaisemmalta periodilta lasketun keskimääräisen vaihtelun perusteella. Varianssi estimoidaan seuraavasti

$$E(\sigma_{t+1}^2) = \frac{\sum_{i=1}^M (R_{t-i+1} - \bar{R})^2}{M-1} \quad (3.4)$$

missä

$\bar{R}$  = tuottosarjan keskiarvo  $M$ :n havainnon otoksessa,

$M$  = havaintojen lukumäärä otoksessa.

Menetelmässä jokaista tuoton neliöityä poikkeamaa keskiarvosta painotetaan samalla kiinteällä painokertoimella  $1/(M-1)$ , joten markkinoiden viimeaikaisen vaihtelun oletetaan olevan yhtä relevantti tekijä tulevan vaihtelun ennustamisessa kuin kaukana historiassa havaitun vaihtelun.

Toisin sanoen paras ennuste tulevasta vaihtelusta on menneisyydessä havaittu keskimääräinen vaihtelu. Näin ollen varianssin ei odoteta vaihtelevan ajassa, ja tuotto prosessi oletetaan homoskedastiseksi. Tätä voidaan havainnollistaa vielä niin, että jaamme estimointiperiodin  $n$ -määrään osaperiodeja, joiden varianssien aritmeettisesta painottamattomasta keskiarvosta saamme ennusteen tulevalle vaihtelulle.

$$E(\sigma_{t+1}^2) = \frac{\sigma_t^2 + \sigma_{t-1}^2 + \dots + \sigma_{t-n+1}^2}{n} \quad (3.5)$$

Koska prosessi oletetaan homoskedastiseksi, ei osaperiodien varianssien välillä tulisi olla tilastollisesti merkitsevää eroa, jolloin minkä tahansa osaperiodin estimaatin tulisi tarjota yhtä hyvä ennuste tulevasta vaihtelusta.

$$E(\sigma_{t+1}^2) = \sigma_t^2 = \sigma_{t-1}^2 = \sigma_{t-n}^2 \quad (3.6)$$

Estimointiperiodin pituus on keskeinen ongelma liukuvan keskiarvon menetelmässä. Periodin tulisi olla riittävän lyhyt, jotta aineisto tarjoaisi tietoa markkinoiden viimeaikaisesta vaihtelusta, eikä saisi liikaa vaikutteita kaukaa menneisyydestä. Pienen aineiston johdosta estimointi on herkkä mahdollisille poikkeaville havainnolle, mikä saattaa tuottaa harhaisia estimaatteja. Poikkeamien huomioimatta jättäminenäkään ei ole sallittavaa, jos emme voi tietää poikkeaman syytä. Tällöin emme nimittäin voi tietää, että sisältääkö suuri poikkeama todella relevanttia tietoa tulevaisuuden kannalta vai onko se täysin perusteeton shokki. Havaintojen määrään kasvattaminen johtaa taas uuteen ongelmaan, sillä silloin viimeisten havaintojen painoarvo pienenee, ja menetämme markkinoiden viimeaikaisen dynamiikan tarjoamaa informaatiota.

Ongelma estimointiperiodin pituudesta luulisi ratkeavan sillä, että luovumme kiinteistä painotuksista. Tällöin voisimme valita suuren määrän havaintoja, sillä silloin viimeaikaisia tuottoja painotettaisiin suuremmalla painolla ja aikaisemmille havainnoille annettaisiin pienempi painoarvo. Tämä tarkoittaisi kuitenkin luopumista myös prosessin homoskedastisuusoletuksesta, sillä silloin tunnustaisimme sen, että volatilitetti on jaksollista. Eri osaperiodien varianssien ei siis oletettaisi tarjoavan enää samansuuruista ennustetta tulevasta vaihtelusta. Eri suuruisten



painokertoimien valitseminen on kuitenkin hankalaa, sillä valinta on subjektiivista.

### 3.4. Heteroskedastisuuden sallivat mallit

#### 3.4.1. ARCH-mallit

Ehdollinen heteroskedastisuus on tunnustettu ilmiönä jo 60-luvulta lähtien, mutta ensimmäinen formaali malli kehitettiin vasta vuonna 1982. Robert Engle esitteli tällöin artikkelissaan joukon malleja kyseisen ilmiön kuvaamiseen, joista yksi autoregressiivinen ehdollinen heteroskedastisuusmalli - ARCH(q) malli - herätti suurimman kiinnostuksen. Tämän pohjalta on julkaistu valtavasti artikkeleita, joissa on esitelty joko tämän mallin laajennuksia tai uusia samantyyppisiä malleja.

Yksi keskeinen ARCH-tyyppisten mallien suosion selittäjä on se, että mallien ominaisuudet eivät ole ristiriidassa talousteorioiden kanssa. Hintasarjan ei tarvitse olla autokorreloitunutta, ja hintaprosessin voidaan todeta olevan martingaali.

ARCH-tyyppisillä malleilla voidaan mallintaa samanaikaisesti sekä tuottosarjaa sarjaa että prosessin virhetermiä. Tuottoprosessia  $y_t$  mallinnetaan lineaarisella regressiomallilla

$$y_t = \beta' x_t + \varepsilon_t, \quad (3.7)$$

jossa  $x_t$  on viivästettyjen tuottojen vektori,  $\beta'$  parametrivektori ja  $\varepsilon_t$  viittaa hetken  $t$  virhetermiin. Prosessin virhetermi  $\varepsilon_t$  on ehdollinen

$\varepsilon_t | \psi_{t-1} \sim N(0, h_t)$ , jossa  $\psi_{t-1} = \{y_{t-1}, x_{t-1}, \dots\}$  on informaatioasetti periodilta  $t-1$ .

$$\varepsilon_t = z_t \sqrt{h_t}, \quad z_t \sim NID(0,1) \quad (3.8)$$

Virhetermi on siis riippuvainen prosessin ehdollisesta varianssista  $h_t$ . Ehdollinen varianssi määräytyy puolestaan mallin muuttujien aikaisemman historian perusteella. Kussakin ARCH-mallissa ehdollisen varianssin yhtälö on erilainen, mutta tasoyhtälön  $y_t$  muoto säilyy vakiona, minkä vuoksi keskitymme jatkossa tarkastelemaan vain varianssiyhtälöä.

ARCH-tyyppiset mallit estimoidaan tyypillisesti logaritmoidulla suurimman uskottavuuden menetelmällä<sup>1</sup> (ML, Maximum Likelihood method), jossa haetaan arvoja parametrivektorille  $\beta'$  maksimoiden funktiota

$$\log \ell = -\frac{T-1}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=2}^T \ln h_t - \frac{1}{2} \sum_{t=2}^T \frac{\varepsilon_t^2}{h_t} \quad (3.9)$$

$$\varepsilon_t = y_t - \beta' x_t$$

Logaritmifunktion monotonisuuden perusteella voidaan havaita, että funktion arvo maksimoituu silloin kun  $\varepsilon_t$  minimoituu. Koska ehdollinen varianssi  $h_t$  määrittyy virhetermin  $\varepsilon_t$  viiveiden funktiona, löydetään samassa estimoinnissa myös varianssiyhtälölle optimaaliset parametrit.

#### 3.4.1.1. ARCH(q)-malli

Ehdollinen varianssi voidaan esittää muodossa

$$\begin{aligned} h_t &= E_{t-1}(y_t - \beta' x_t)^2 \\ &= E_{t-1}[\varepsilon_t^2] \end{aligned} \quad (3.10)$$

Havaitaan, että ajankohdalla  $t-1$  tehty ennuste hetken  $t$  neliöidystä virhetermistä tuottaa ajankohdalle ehdollisen varianssin  $h_t$ . ARCH(q)-mallin ehdollinen varianssi määräytyy neliöityjen virhetermien viiveiden avulla seuraavasti:

---

<sup>1</sup> ks. Kahra & Kanto (1999, 32)



$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \dots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}^2 \quad (3.11)$$

Yleisesti ARCH-tyyppisten mallien parametrit estimoidaan logaritmoidulla suurimman uskottavuuden menetelmällä. ARCH(q)-mallin AR-muotoinen rakenne mahdollistaa parametrien estimoinnin myös yksinkertaisella pienimmän neliösumman menetelmällä, sillä varianssiyhtälön (3.11) parametrit  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$  voidaan estimoida tasoyhtälön (3.7) virhetermeistä

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \dots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}^2 + \eta_t \quad (3.12)$$

jossa  $\eta_t$  on valkoista kohinaa. Menetelmä on kuitenkin hidas, sillä siinä joudutaan toistamaan estimointi niin monta kertaa, että neliöityjen virhetermien autokorrelaatio häviää ja parametrit konvergoivat.

Olettamalla, että  $\alpha_0 > 0$ ,  $\alpha_i \geq 0$ ;  $i = 1, 2, \dots, q$ , taataan mallin ehdollisen varianssin positiivisuus. Oman erikoistapauksensa muodostaa tilanne, jossa  $\alpha_i = 0$ , jolloin prosessin varianssi ei ole ehdollinen ajankohdalle. Homoskedastisuus on siis ARCH-prosessin eräänlainen erikoistapaus.

Yhtälö (3.11) on ARCH(q)-mallin varianssiyhtälö, jossa q viittaa mallin viiveiden lukumäärään. Mitä enemmän on varianssiyhtälöön valittu viiveitä, sitä pidempi muisti prosessilla on. Parametrien arvot vaikuttavat puolestaan muistin voimakkuuteen eli siihen kuinka nopeasti shokin vaikutus häipyä prosessista. ARCH-yhtälön viiverakenne implikoi myös jakauman paksuhäntäisyyttä. Engle näyttää ARCH(1)-mallilla miten mallin prosessoima ehdollinen jakauma on paksuhäntäisempi kuin normaalijakauma. (Engle, 1982)

#### 3.4.1.2. GARCH(p,q)-malli

Ekonometriassa pyritään rakentamaan mahdollisimman säästäväisiä eli vähän muuttujia sisältäviä malleja. ARCH-mallia käytettäessä ongelmaksi muodostuu usein mallin pitkä viiverakenne, mistä johtuen parametreja ja rajoitteita on paljon, ja estimointi monimutkaistuu. Bollerslev

(1986) laajensi ARCH( $q$ )-mallia siten, että yhtälöön (3.11) lisättiin  $p$  kappaletta ehdollisen varianssin  $h_t$  omia viivästettyjä arvoja.

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j} \quad (3.13)$$

GARCH(1,1)-mallin rakennetta voidaan tulkita niin, että ehdollinen varianssi  $h_{t-1}$  selittää pitkän aikavälin vaihtelua sisältäen informaatiota edellisten periodien virhetermeistä. Tätä informaatiotietä päivitetään vielä kuluvan periodin uudella shokilla  $\varepsilon_{t-1}^2$ , mistä muodostuu ennuste periodille  $t$ . Nyt nähdään, että varianssiyhtälön virhetermin viiverakenne ei pääse kasvamaan suureksi, sillä aikaisemmat virhetermit on sisällytetty ehdolliseen varianssiin.

Pienemmän viiverakenteen ansiosta GARCH-malli on useasti osoittautunut rahoitusmarkkinoiden volatilitteettia mallinnettaessa käyttökelpoisemmaksi malliksi kuin ARCH-malli. ARCH-mallihan on itseasiassa GARCH(0,1)-malli, jossa ei ole mukana ehdollisen varianssin omia viivästettyjä arvoja.

Positiivisen varianssin varmistamiseksi on GARCH-mallin parametrien täytettävä ehdot

$$\begin{aligned} \alpha_0 &> 0, \\ \alpha_i &\geq 0; i = 1, 2, \dots, q, \\ \beta_j &\geq 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Prosessin kovarianssistationaarisuudelle on voimassa ehto

$$\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j < 1, \quad (3.15)$$

Mikäli GARCH-prosessi täyttää edellä mainitut positiivisuus- ja kovarianssistationaarisuusehdot,



voidaan prosessille määritellä ei-ehdollinen, pitkän aikavälin varianssi

$$Var(\varepsilon_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i - \sum_{j=1}^q \beta_j} \quad (3.16)$$

Tutkimalla summaa  $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j$  voimme arvioida shokin pysyvyyttä. Pysyvyyttä voidaan havainnollistaa shokin puoliintumisajalla, joka saadaan selville ratkaisemalla periodien määrä  $t$  yhtälöstä (3.17). (Engle 2001)

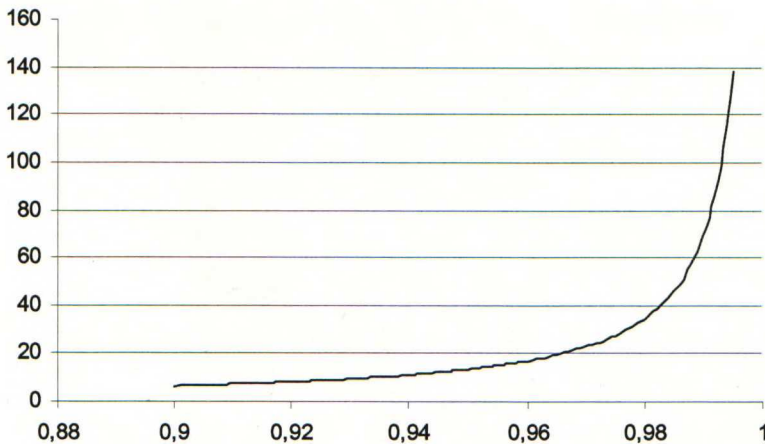
$$\left( \sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j \right)^t = \frac{1}{2} \quad (3.17)$$

Ottamalla luonnolliset logaritmit yhtälön molemmista puolista, saadaan

$$t = \frac{\ln(1/2)}{\ln\left(\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j\right)} \quad (3.18)$$

Kuviossa 1. on havainnollistettu GARCH-yhtälön parametrien vaikutusta shokin pysyvyyteen. Kuviosta nähdään shokin puoliintumisajan kasvavan eksponentiaalisesti, kun parametrien  $\alpha$  ja  $\beta$  summa lähestyy yhtä.

Kuvio 1. Shokin puoliintumisaika periodeina  $t$  parametrien  $\alpha$  ja  $\beta$  summan funktiona



Oman erityistapauksensa muodostaa tilanne, jossa

$$\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j = 1 \quad (3.19)$$

Tällöin yhtälöt (3.15) ja (3.16) eivät ole määriteltyjä, ja varianssiprosessissa on yksikköjuuri. Hintaprosessissa yksikköjuuren esiintyminen tarkoittaa, että prosessi on epästationaarinen. Varianssiprosessissa tilanne on kuitenkin toinen, ja voidaan osoittaa, että vaikka kyseisten IGARCH-mallien (Integrated GARCH) marginaalivarianssi on ääretön, voi prosessi olla silti vahvasti stationaarinen täyttämättä samanaikaisesti heikon stationaarisuuden ehtoja. (Gourieroux, 2001)

Olemme edellä todennneet, että GARCH-malli pystyy huomioimaan volatilitietin jaksollisuuden, ja tietyillä ehdoilla se luo myös pitkän ajan keskiarvoon hakeutuvan prosessin. Näiden lisäksi mallin yhtenä etuna voidaan pitää sen joustavuutta. Malliin voidaan tarvittaessa lisätä eksogeeninen muuttuja, jolloin saamme yhtälön

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j} + \varphi X_{t-i}, \quad (3.20)$$

jossa  $X_{t-i}$  edustaa eksogeenisen muuttujan viivästettyjä arvoja. Engle (2001) mallinsi Dow Jones teollisuusindeksin volatilitietin ottamalla eksogeeniseksi muuttujaksi kolmen kuukauden T-bill koron. Sillä arveltiin olevan vaikutusta volatilitiettiin sitä kautta, että koroilla on yhteys indeksissä noteerattujen yritysten lainanhoitokustannuksiin. Eksogeenisen muuttujan kertoimeksi saatiin 0.0031, mikä on pieni mutta tilastollisesti merkitsevä. Kertoimen positiivisuus implikoi käytännössä sitä, että korkeat korot kasvattavat osakemarkkinoiden volatilitietin, ja matalilla koroilla ei ole vaikutusta lainkaan.



### 3.4.1.3. Asymmetrisen volatiliteetin mallit

Sekä ARCH- että GARCH-mallissa shokkien vaikutus prosessin ehdolliseen varianssiin on symmetrinen riippumatta siitä, onko shokki positiivinen vai negatiivinen. Edellä kappaleessa 3.1. esitettiin evidenssiä, että rahoitusmarkkinoiden volatiliteetti käyttäytyy eri tavalla positiivisten ja negatiivisten tuottojen yhteydessä. Tämän asymmetrian huomioimiseksi Nelson (1991) esitteli EGARCH-mallin,

$$\ln h_t = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k g(z_{t-k}), \quad (3.21)$$

Yhtälön (3.8) mukaan standardoitu shokki on

$$z_t = \frac{\varepsilon_t}{\sqrt{h_t}} \quad (3.22)$$

Yhtälössä (3.23) standardoitu virhetermi  $z_t$  määräytyy nyt eri tavalla riippuen siitä, onko shokki positiivinen vai negatiivinen.

$$g(z_t) = \theta z_t + \gamma [|z_t| - E|z_t|] \quad (3.23)$$

EGARCH-mallissa voidaan virhetermin jakaumana käyttää t-jakaumaa tai normaalijakaumaa. Normaalijakaumaoletuksen vallitessa standardoidun shokin odotusarvo on

$$E|z_t| = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad (3.24)$$

Mikäli shokki on positiivinen eli  $\varepsilon_t > 0$ , on funktion  $g(z_t)$  kulmakerroin  $\theta + \gamma$ . Jos shokki on negatiivinen, on kerroinvaikutus  $\theta - \gamma$ .

EGARCH-malli (3.21) voidaan myös muuttaa vähemmän viiveitä sisältävään ARMA-muotoon. Tällöin yleisin EGARCH(1,1)-malli näyttää seuraavalta (Engle, 1993):

$$\log h_t = a_0 + \beta \log(h_{t-1}) + \theta \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sqrt{h_{t-1}}} + \gamma \left[ \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sqrt{h_{t-1}}} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right] \quad (3.25)$$

Paitsi, että EGARCH-malli pystyy huomioimaan shokkien asymmetrian, on toinen keskeinen ero GARCH-malliin verrattaessa se, että EGARCH-mallissa parametrit voivat olla myös negatiivisia.

Glosten ym. (1993) esittävät volatilitietin asymmetrian huomioimiseksi GARCH-tyyppistä mallia (3.26), jossa dummy-muuttujan avulla mallinnetaan negatiivisten shokkien yhteydessä esiintyvää volatilitietin kasvua.

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_t^2 + \beta h_{t-1} + \gamma S_{t-1}^- \varepsilon_{t-1}^2, \quad \text{jossa} \begin{cases} S_t^- = 1, \text{ kun } \varepsilon_t < 0 \\ S_t^- = 0, \text{ kun } \varepsilon_t \geq 0 \end{cases} \quad (3.26)$$

Engle & Ng (1993) raportoivat, että ARCH-tyyppisistä malleista voidaan EGARCH-mallia ja edellä esiteltyä GJR-mallia pitää parhaimpina volatilitietin asymmetrian mallinnusmenetelminä. He esittävät kuitenkin kritiikkiä EGARCH-mallia kohtaan, sillä simulointitutkimukset osoittavat EGARCH-mallin liioittelevan suurten shokkien vaikutusta volatilitiettiin. He ovat havainneet, että ehdollisen volatilitietin vaihtelevuus saattaa olla EGARCH-mallin generoimassa prosessissa jopa suurempaa kuin varsinaisessa neliöidyssä tuottosarjassa.

### 3.4.2. Eksponentiaalinen liukuvan keskiarvon (EWMA) menetelmä

Kappaleessa 3.3. tuotiin esille liukuvan keskiarvon menetelmään liittyviä ongelmia. Esitin perusteluja, että aikaisempien havaintojen painoarvoa ei voida pitää vakiona, vaan kaukaisempien shokkien painoarvoa tulisi vähentää. J.P.Morgan (1996) ehdottaa ongelman ratkaisuksi mallia



$$\sigma_t^2 = (1 - \lambda) \sum_{i=1}^{\infty} R_{t-i}^2 \lambda^{i-1}, \quad (3.27)$$

jossa  $\lambda$  on painokerroin, ja  $R_t$  on tuotto periodilla  $t$ . Painokertoimen arvon täytyy olla pienempi kuin yksi, joten intuitiivisesti voidaan aikaisempien havaintojen painoarvojen havaita pienenevän ajassa eksponentiaalisella vauhdilla. Tästä johtuen parametria  $\lambda$  voidaan kutsua vaimennuskertoimeksi. Mitä korkeampi on  $\lambda$ , sitä hitaammin edellisten havaintojen painoarvo vaimenee. Valitaan nyt kaksi ensimmäistä viivettä, jolloin saadaan muoto

$$\sigma_t^2 = (1 - \lambda)R_{t-1}^2 + \lambda(1 - \lambda)R_{t-2}^2, \quad (3.28)$$

Koska  $\sigma_{t-1}^2 = (1 - \lambda)R_{t-2}^2$ , voidaan tuottotermi korvata varianssitermillä, ja päädytään rekursiiviseen muotoon

$$\sigma_t^2 = (1 - \lambda)R_{t-1}^2 + \lambda\sigma_{t-1}^2 \quad (3.29)$$

Tästä voidaan havaita yhtäläisyys GARCH(1,1)-malliin. Itse asiassa EWMA menetelmä voidaan tulkita GARCH-mallin erikoistapaukseksi, jossa vakioparametri  $\alpha_0$  on nolla, ja loput parametrit summautuvat IGARCH-mallin tavoin yhteen. Näin ollen Riskmetrics olettaa varianssiprosessin epästationaariseksi

EWMA-menetelmän käytännöllisyyttä puoltaa se, että mallissa on vain yksi estimoitava parametri. Vaimennuskerroin  $\lambda$  estimoidaan minimoimalla funktiota

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (R_{t+1}^2 - \sigma_{t+1|t}^2(\lambda)), \quad (3.30)$$

jossa  $\sigma_{t+1|t}^2(\lambda)$  on varianssifunktio (3.27). Riskmetrics on havainnut, että hyvä viitearvo vaimennuskertoimelle on 0.94, kun estimoidaan päivittäistä varianssia. Kuukausitason varianssia ennustettaessa he esittävät parametrille arvoa 0.97. Kyseisten parametrin arvojen käyttö paljastaa

sen kuinka pitkältä ajalta Riskmetrics uskoo löytyvän selitysvoimaa. Käytännön estimoinnissa on hyödytöntä ottaa mukaan kaukaisia havaintoja, joiden painoarvo on marginaalisen pieni. Tästä johtuen Riskmetrics rajaa estimonnista sellaiset havainnot pois, joiden painoarvo suhteessa ensimmäiseen havainnon painoarvoon jää alle yhteen prosenttiin. Tuottosarjan geometrisen suppenevuuden perusteella voimme määrittää havaintosarjan pituuden samalla logiikalla kuin GARCH-mallin puoliintumisajan. Päivähavaintosarjan pituudeksi saadaan tällöin 74 havaintoa ( $\lambda = 0.94$ ) ja kuukausitasolla 151 viimeistä havaintoa ( $\lambda = 0.97$ ).

### 3.5. Heteroskedastiset mallit volatiliteetin ennustamisessa ja riskienhallinnassa

Szakmary ym. (tulossa) ja Polasek & Pojarliev (2001) ehdottavat volatiliteettimallien ennustuskyvyn testataamiseen lineaarista regressiomallia

$$r_t^2 = \alpha + \beta \hat{\sigma}_t^2 + \varepsilon_t, \quad (3.31)$$

jossa  $r_t^2$  = hetken  $t$  neliöity tuotto.  $\hat{\sigma}_t^2$  on varianssin ennuste hetkellä  $t$ . Harhattomassa volatilitettimallissa tulisi parametrin  $\alpha$  olla lähellä nollaa, ja parametrin  $\beta$  lähellä yhtä. Residuaalien jäännösneliösummasta voimme laskea regressiomallin selitysasteen, jota voimme käyttää eri volatiliteettimallien tuottamien ennusteiden tarkkuuden ja selitysvoiman analysoinnissa.

Poon & Granger (tulossa) tekivät kirjallisuuskatsauksen volatiliteetin ennustamista käsittävistä tutkimuksista. He keräsivät tuloksia 93:sta tutkimuksesta ja vertailivat sen pohjalta eri mallien ennustekykyä. Tutkijat jakoivat menetelmät historiallisiin malleihin ja ARCH-tyyppisiin malleihin. Historiallisiin menetelmiin sisällytettiin muun muassa MA, EWMA, sekä lukuisia muita historiallisia aikasarjamenetelmiä. Verrattaessa näitä menetelmiä ARCH-malleihin havaittiin 56:ssa prosentissa tutkimuksista jokin historiallinen menetelmä paremmaksi kuin ARCH-tyyppinen malli. Tässä on kuitenkin huomautettava, että valtaosassa niissä tutkimuksissa, jossa historiallinen menetelmä oli parempi, käytettiin EWMA-menetelmää. Tämän pohjalta



voimme päätellä, että ARCH-mallit tuottavat kuitenkin parempia ennusteita kuin yksinkertaiset liukuvan keskiarvon mallit. Verrattaessa ARCH-malleja keskenään tutkijat havaitsivat GARCH-mallin ARCH-mallia selvästi paremmaksi. Toisaalta taas sellaiset mallit, jotka pystyvät huomioimaan volatilitietin asymmetrian, ovat tutkimuksien mukaan parempia kuin GARCH.

Poon & Granger (tulossa) raportoivat, että lukuisten tutkimusten perusteella on ARCH-malleissa havaittavissa kaksi ratkaisematonta ongelmaa. ARCH-mallien tuottamat standardoidut virhetermit eivät ole tyypillisesti normaalisia, vaan residuaaleissa esiintyy huipukkuutta. Tämän uskotaan johtuvan siitä, että ehdollinen volatilitietti ei kykene yksin mallintamaan tuottojakauman paksuja häntiä, ja mallinnuksessa tulisikin huomioida myös jakauman korkeampia momentteja. Toinen ongelma liittyy siihen miten poikkeavia havaintoja tulisi käsitellä. Tutkimuksissa on nimittäin havaittu, että sulkemalla volatilitiettimallin estimoinnista ulos suuresti poikkeavat havainnot, kasvaa estimoidun mallin ennustuskyky huomattavasti. Tilastotieteen teorian näkökulmasta havaintojen pois jättäminen ei ole kuitenkaan sallittavaa kuten kappaleessa aiemmin totesin. Erityisesti, jos volatilitiettimallilla on tarkoitus estimoida VaR-lukuja, ei äärihavaintojen sisältämää informaatiota voida jättää huomioimatta.

ARCH-tyyppisten mallien käyttöä VaR-estimoinnissa on tutkittu melko vähän. Osassa tutkimuksista on heteroskedastisia malleja sovellettu historialliseen tai Monte Carlo simulointiin. Valtaosa tutkijoista on kuitenkin keskittynyt tutkimaan mallien eroavaisuuksia perinteisessä parametrisessä viitekehyksessä. Tuon seuraavaksi esille parametriseen menetelmään perustuvien tutkimusten keskeisimpiä tuloksia.

Siinä missä volatilitiettimallien ennustekyvyn arvointi perustuu regressiomalliin (3.31), on VaR-viitekehyksessä volatilitiettimallien tarkkuutta arvioitava jakauman hännän VaR:n ylitysten perusteella.

Hendricksin (1996) tutkimuksessa vertailtiin MA- sekä EWMA-menetelmien eroja valuuttamarkkinoilla. MA-menetelmässä estimointiperiodin pituutena käytettiin 50, 125, 250, 500 ja 1250 päivän liukuvia keskiarvoja. EWMA-menetelmää testattiin vastaavasti vaimennuskertoimen arvoilla 0.94, 0.97 ja 0.99. Menetelmien avulla Hendricks estimoi 3005



päivätason VaR-lukua, joiden arviointi perustui Engelin ja Gizyckin (1999) käyttämiin kriteeriereihin. Tulokset osoittavat, että MA-menetelmässä konservatiivisuus kasvaa estimointiperiodin pituuden kasvaessa mikä on varsin luonnollista, sillä havaintojen suuren määrän johdosta on uusien shokkien vaikutus vähäisempää kuin pienemmällä aineistolla. EWMA-menetelmässä konservatiivisuudella ja vaimennuskertoimella on positiivinen korrelaatio, mitä voidaan perustella yhtälön (3.29) avulla. Kun vaimennuskerroin lähestyy yhtä, lähestyy shokkitermin kertoimen arvo nollaa, ja volatilitiennuste pysyttelee lähellä pitkän ajan keskiarvoa. Menetelmien keskinäisessä vertailussa näyttäisi siltä, että vaimennuskertoimen ollessa pienempi kuin 0.97, on MA-menetelmä aina konservatiivisempi kuin EWMA.

Menetelmien tarkkuutta tutkittaessa on molempien menetelmien 95% VaR-estimaatit hyvin tarkkoja. Tulokset kuitenkin huononevat hyvin selkeästi siirryttäessä tarkastelemaan 99% VaR-lukuja. Kumpikaan menetelmä ei näyttäisi kykenevän huomioimaan jakauman paksuja häntiä riittävän hyvin, mikä näkyy siinä, että VaR:n ylityksiä on yli 1.5%. VaR-lukujen tehokkuutta mitattaessa on EWMA selvästi parempi kuin MA kaikilla käytetyillä vaimennuskertoimen arvoilla. Huomionarvoista tuloksissa on myös se, että kasvatettaessa estimointiperiodin pituutta MA-menetelmässä, vähenenee VaR-lukujen ja toteutuneiden arvojen välinen korrelaatio hyvin näkyvästi. Polasek & Pojarliev (2001) käyttivät vertailututkimuksessaan MA- ja EWMA-menetelmiä, sekä GARCH, TGARCH, AGARCH, EGARCH ja PGARCH malleja.<sup>2</sup> Nasdaq-100 indeksin volatilitiettä ennustettaessa havaittiin heteroskedastisten mallien yltävän selvästi korkeampaan selitysasteeseen kuin liukuvan keskiarvon mallin. Heteroskedastisten mallien keskinäisessä vertailussa havaittiin AGARCH-malli parhaimmaksi malliksi. Tutkittaessa mallien tarkkuutta 95% VaR-estimoinnissa, olivat perinteisen GARCH-mallin tuottamat VaR-estimaatit tarkimpia. GARCH-mallia käytettäessä toteutuneet tuotot ylittivät arvioidun VaR:n 6.81 prosentissa havainnoista, kun MA-menetelmässä ylityksiä kirjattiin 10.8%. Tutkijat eivät kuitenkaan ottaneet kantaa ylitysten tilastolliseen merkitsevyyteen, minkä pohjalta voisimme

<sup>2</sup> TGARCH-malli on analoginen GARCH-mallin kanssa sillä erolla, että tasoyhtälön virhetermi generoidaan mallissa t-jakaumasta. Asymmetrinen GARCH (AGARCH) eroaa GARCH-mallista siinä, että varianssiyhtälön virhetermin parametri vaihtelee sen mukaan onko shokki negatiivinen vai positiivinen. PGARCH-mallissa on GARCH-mallia yleistetty niin, että tuottojen potenssia käsitellään myös muuttujana, jolle pyritään estimoimaan optimaalista arvoa.



tehdä päätelmiä mallien absoluuttisesta tarkkuudesta. Yksi käytetyimmistä testeistä, jolla voidaan testata ylitysten tilastollista merkistevyyttä on Kupiecien testi<sup>3</sup>.

Ekonometriassa malleja rakennettaessa on tärkeää huomioida käytettävissä olevat resurssit  $Y$ , mallien rakentamiseen vaadittavat taloudelliset kustannukset ( $c$ ) kuten tarvittavien ohjelmistojen hankkimisesta aiheutuneet kustannukset ja ajankäytöstä aiheutuneet palkkakustannukset. Tutkijan on arvioitava mallista saatavaa hyötyä ja valittava sellainen malli, joka tuottaa suurimman nettohyödyn. Asian voi esittää formaalisti muodossa

$$\begin{aligned} \text{Max } u(M_i) &= r(M_i) - c(M_i) \\ \text{s.t. } c(M_i) &\leq Y, \end{aligned} \quad (3.32)$$

jossa  $u(M_i)$  kuvaa menetelmän  $i$  odotettua nettohyötyä,  $r(M_i)$  menetelmän  $M_i$  käytöllä saavutettavia lisätuloja sekä  $c(M_i)$  mallin rakentamiseen sidottuja kustannuksia. Käytän tutkimuksessani edellä käsitellyistä malleista liukuvan keskiarvon menetelmää eräänlaisena naiivina ja edullisena vertailumallina.

ARCH-tyyppisistä malleista tulen sisällyttämään tutkimukseen ne mallit, jotka havaitsen riittävän selitysvoimaisiksi. Tällä tarkoitan sitä, että valitun mallin parametrien tulee olla tilastollisesti merkitseviä luottamustasolla ( $\alpha = 0.05$ ). EWMA-mallia tulen käyttämään sellaisenaan Riskmetricsin estimoimalla vaimennuskertoimella ( $\lambda = 0.94$ ). Käytän Riskmetricsin estimaattia siitä syystä, että he käyttävät tuota arvoa kaikkien rahoitusinstrumenttien päivätason volatiliteettiennusteissa. Jorion (2000) on havainnut vaimennuskertoimen sopivan hyvin useisiin aineistoihin, ja estimaatin arvo on hänen havaintojen mukaan melko robusti.

---

<sup>3</sup> es. Kappale 5.2.2.

### 3.6. Implisiittinen volatilitiitti

Historialliseen volatilitiettiin pohjautuvien VaR-estimaattien tarkkuus heikkenee, jos markkinat kohtaavat olennaisen ja pysyvän muutoksen. Muutos saattaa syntyä esimerkiksi neliöityjen tuottojen autokorrelaatioissa, jolloin GARCH-malli alkaa tuottaa virheellisiä ennusteita. Tällaiset muutokset ovat kuitenkin erittäin harvinaisia, jos GARCH-malli on estimoitu riittävän pitkältä ajanjaksolta.

Markkinoiden lyhyen ajan shokit ovat ongelmallisia VaR-viitekehityksessä, jos shokit ovat voimakkaita ja ilmestyvät nopeasti. Tällöin markkinaodotus tulevasta volatilitiitista saattaa tarjota tärkeää informaatiota juuri oikealla hetkellä. Jorion (1995) vertasi liukuvan keskiarvon, EWMA-mallin ja tulevaisuuden odotuksia sisältävän implisiittisen volatilitiitin ennustuskäytöä valuuttamarkkinoilla. Vuoden 1992 Euroopan valuuttajärjestelmän (EMS) kriisissä valuuttaparilla DEM/GBP spekulointi rajoitettiin. Syyskuussa 1992 Saksan markka vahvistui voimakkaasti puntaan nähden, mistä saatiin ennuste jo shokkia ennen kyseisen valuuttaparin optiohinnasta lasketusta volatilitiitista. Molemmat historiaan pohjautuvat volatilitiittimallit eivät kerinneet reagoimaan shokkiin, sillä muutos oli niin nopea. Implisiittinen volatilitiitti sitä vastoin antoi signaalin tulevasta kehityksestä juuri hetkeä ennen rajuimpia vaihteluita. Tällaisessa markkinatilanteissa näyttäisi implisiittinen volatilitiitti erottuvan edukseen.

Black & Scholes optiohinnoittelumalli (B&S) on yleisimmin käytetty implisiittisen volatilitiitin laskentamenetelmä. Saatuaamme markkinoilta optiolle hintanoteerauksen, voimme edetä mallissa takaisinpäin ja laskea minkä suuruista volatilitiittia markkinat odottavat nykyisellä hinnalla, sillä volatilitiittia lukuun ottamatta mallin kaikki muut muuttujat ovat tunnettuja. Koska mainitusta mallista ei voida ratkaista volatilitiittia eksplisiittisesti, on implisiittisen volatilitiitin arvoa haettava interpoloimalla.

B&S-malli olettaa option kohdetuotteen hintaprosessin jatkuvaksi, mikä ei kuitenkaan vastaa käytäntöä, sillä pörssit asettavat hinnanmuutoksille tietyn minimiarvon (tick size). Tämä tarkoittaa sitä, että kohdetuotteen arvon muuttuessa sen hinta markkinapaikalla ei välttämättä



muutu, jos arvonmuutos ei ole tarpeeksi suuri. Koska hinta ei näin ollen aina perustu kohdetuotteen todelliseen arvoon, saattaa implisiittisen volatilitietin estimaatti olla harhainen.

Tuotteen markkinahintana käytetään yleensä viimeisen toteutuneen kaupan hintaa. Jos kuitenkin tarvitsemme tuotteelle jatkuvan hintanoteerauksen kuten johdannaisia hinnoitellessa, on markkinahintaa arvioitava kohdetuotteen myynti- ja ostonoteerausten väliltä. Yleinen käytäntö on laskea myynti- ja ostonoteerausten keskiarvo, mikä toimii hinnan approksimaationa usein varsin hyvin. Empiiriset tutkimukset ovat kuitenkin osoittaneet, että todellinen hinta ei sijaitse välttämättä täsmälleen myynti- ja ostotarjousten puolivälissä, vaan hinta riippuu myynti- ja ostopuolen tarjousten volyymeistä (Ho & Stoll 1981; ks. Hentschel 2002). Jos ostajat dominoivat markkinoilla, on selvää, että kysyntä nostaa hinnan lähemmäs myyntipuolen hintaa. Tuotteen markkinahintaa approksimoitaessa on myös muistettava, että tuleva kauppahinta ei välttämättä sijaitse myynti- ja ostonoteerausten välillä, vaan kaupat saattavat syntyä myös välin ulkopuolella.

B&S-mallin keskeisin heikkous on se, että se ei oleta volatilitietille stokastista prosessia. Malli olettaa vaihtelun säilyvän vakioisena maturiteettiin asti, mikä on ristiriidassa osiossa 3.1. esitettyjen empiiristen havaintojen kanssa. Tämä näkyy käytännössä siinä, että option markkinahinta poikkeaa tyypillisesti sen teoreettisesta Blackin & Scholesin antamasta hinnasta.

Hintanoteerausvirheet ja B&S mallin heikkoudet havaitaan nk. volatility-smile ilmiöstä, jossa eri toteutushinnan optioille saadaan erisuuruisia implisiittisen volatilitietin arvoja.

Edellä esitetyt hintanoteerauksista ja B&S mallin heikkouksista aiheutuneet vääristymät ovat erityisen ongelmallisia out-of-the-money optioilla. Näiden optioiden toteutushinta on kaukana alla olevan tuotteen markkinahinnasta, ja option arvo on lähellä nollaa. Näillä optioilla pienetkin poikkeamat teoreettisesta hinnasta aiheuttavat suurta harhaa implisiittiseen volatilitiettiin. (Hentschel 2002)

Useat tutkijat ovat kehitelleet optiohinnoittelumalleja, joissa mallinnetaan alla olevan tuotteen hintaprosessin lisäksi myös varianssin stokastista prosessia. Kun B&S-mallissa estimoidaan varianssiparametrille vain yksi kiinteä arvo, perustuu kehittyneimmissä malleissa option

hinnoittelu kunkin rationaalisen sijoittajan arvioon jäljellä olevan juoksuajan tuottojakaumasta. Mallit ovat kuitenkin erittäin monimutkaisia, joten niiden laajempi käyttö johdannaismarkkinoilla lieneekin hyvin vähäistä.

Esitetyistä ongelmista johtuen on implisiittinen volatiliteetti havaittu muutamissa tutkimuksissa huonommaksi menetelmäksi kuin historialliseen informaatioon pohjautuvat menetelmät. Lamoureux & Lastrapes (1993) ja Canina & Figlewski (1993) raportoivat, että implisiittinen volatiliteetti ei sisällä uutta informaatiota, jota ei olisi historiallisissa malleissa jo huomioitu.

Jorionin (1995) lisäksi Szakmary ym. (tulossa) havaitsivat implisiittisen volatiliteetin tarkemmaksi tulevan volatiliteetin ennustajaksi kuin historialliset menetelmät. He käyttivät tutkimuksessaan aineistoa 35 futuurimarkkinoilta, joten tulos on robusti. Szakmary ym. (tulossa) esittävät, että yksi mahdollinen syy aikaisempien tutkimusten päinvastaisiin tuloksiin saattaisi löytyä tutkimuksissa käytetystä instrumentista. He tähdentävät, että on tärkeää käyttää futuureja ja futuurioptioita, sillä futuurien kaupankäynnistä ja hintanoteerauksista aiheutuneet mittausvirheet ovat huomattavasti pienempiä kuin kohdetuotteen alkuperäisillä markkinoilla. Szakmary ym. (tulossa) heittävät ilmaan myös ajatuksen, että erilaisille tutkimustuloksille saattaa olla niinkin naiivi selitys kuin, että implisiittinen volatiliteetti toimii toisilla markkinoilla paremmin kuin toisilla. Ajatus kuulostaa kehäpäätelmältä, sillä he korostavat samanaikaisesti juuri futuurimarkkinoiden paremmuutta.

Poon & Granger (tulossa) raportoivat, että 17:ssä tutkimuksessa on implisiittinen volatiliteetti havaittu ARCH-tyyppisiä malleja tarkemmaksi ennusteenantajaksi, ja vain yhdessä tutkimuksessa on ARCH-mallit olleet implisiittistä volatiliteettia parempia. Verrattaessa implisiittistä volatiliteettia muihin kuin ARCH-tyyppisiin volatiliteettimalleihin ovat tutkimustulokset olleet lähes yhtä selviä. Kaikkiaan 26:ssa tutkimuksessa on implisiittisen volatiliteetin osoitettu tarjoavan tarkempia estimaatteja kuin muut historialliset mallit, ja vain 8:ssa tutkimuksessa ovat tulokset olleet päinvastaisia.

Implisiittisen volatiliteetin käyttöä VaR-estimoinnissa ei ole havaintojeni mukaan tutkittu lainkaan. Tämä on mielestäni hieman yllättävää, sillä kuten Polasek & Pojarliev (2001)



raportoivat, ei volatiliteetin ennustekyvyn tutkiminen anna suoraa vastausta siihen kuinka hyvin menetelmä toimii VaR-estimoinnissa.

1990-luvulla muutamat markkinapaikat ovat rakentaneet implisiittisestä volatiliteetista indeksejä, jotka tarjoavat sijoittajille informaatiota tietyn osakeindeksin optioiden implisiittisestä volatiliteetista. Keskeisimmät noteeratut volatiliteetti-indeksit ovat S&P 100 osakeindeksin VIX indeksi, Nasdaq-100 osakeindeksin VXN indeksi, sekä DAX 30 osakeindeksin VDAX indeksi.

Volatiliteetti-indeksit lasketaan osakeindeksin osto- ja myyntioptioiden implisiittisistä volatiliteeteista siten, että indeksin maturiteetti säilyy jatkuvasti halutun pituisena.<sup>4</sup> Näin ollen indeksi ei eräänny koskaan ja on immuuni poikkeuksellisen suurille hinnanvaihteluille, joita havaitaan yleensä johdannaisten erääntyessä. Huomionarvoinen vääristymiä poistava tekijä on myös se, että indeksiin valitaan sellaisia optioita, joiden toteutushinta on lähimpänä sen hetkistä markkinahintaa. Tällaiset at-the-money optiot ovat erittäin likvidejä, joten optiolle löytyy hintanoteeraus useammin kuin optioille, joiden hinta on kauempana toteutushinnasta. Indeksien jatkuva päivitys eliminoi tehokkaalla tavalla myös volatility-smile efektiä, sillä toteutushinnan etäisyys kohde-etuuden markkinahinnasta säilyy jatkuvasti lähes vakioisena.

Näistä hyödyistä johtuen käytän tutkimuksessani implisiittisen volatiliteetin estimaattina volatiliteetti-indeksin antamia arvoja. Esittelen volatiliteetti-indeksin yksityiskohtia tarkemmin osiossa 4.2.

---

<sup>4</sup> Soveltaen Black & Scholesin mallia

### 3.7. Vinous ja huipukkuus rahoitusmarkkinoiden aikasarjoissa

Vinous ja huipukkuus määräytyvät odotusarvon ja keskihajonnan perusteella seuraavasti:

$$Vinous = \gamma_1 = E\left[\frac{(X - \mu)^3}{\sigma^3}\right] \quad (3.33)$$

$$Huipukkuus = \gamma_2 = E\left[\frac{(X - \mu)^4}{\sigma^4}\right] \quad (3.34)$$

Vinouden ymmärtämiseksi ajatellaan symmetristä jakaumaa, jonka keskiarvo ja vinous ovat nolla. Lisätään jakaumaan yksi positiivinen arvo läheltä odotusarvoa, jolloin jakaumassa on enemmän positiivisia kuin negatiivisia havaintoja. Jakauman odotusarvo on positiivinen, mutta vinous on negatiivinen. Negatiivinen vinous johtuu siitä, että kaavassa (3.33) negatiivisista arvoista  $X$  vähennetään positiivinen odotusarvo, ja korotettaessa erotus potenssiin kolme, on vaikutus suurempi kuin tehtäessä sama jakauman positiivisille arvoille. Tämä tarkoittaa käytännössä sitä, että jakauman odotusarvoa pienemmät arvot ovat todennäköisempiä kuin odotusarvoa suuremmat arvot. On syytä vielä korostaa, ettei negatiivinen vinous välttämättä merkitse sitä, että negatiiviset arvot olisivat todennäköisempiä kuin positiiviset arvot. Muutetaan tilannetta niin, että lisätään symmetriseen jakaumaan arvo, joka sijaitsee tarpeeksi kaukana keskiarvosta aivan jakauman oikeassa hännässä. Tällöin suuren positiivisen poikkeaman korottaminen kolmanteen potenssiin johtaa siihen, että odotusarvo ja vinous muuttuvat molemmat positiivisiksi. Yleistäen voidaan sanoa, että negatiivinen vinous tarkoittaa sitä, että jakauman odotusarvoon verrattuna on vasen häntä pidempi kuin oikea häntä.

Tarkasteltaessa rahoitusmarkkinoiden tuottoja jakaumatasolla, voidaan havaita, että jakaumat ovat tyypillisesti negatiivisesti vinoja ja huipukkaita. Turner & Weigel (1992) tutkivat S&P 500 ja Dow Jones indeksien tuottosarjoja ajanjaksolla 1928-1989. Tulokset osoittavat, että tuottojakaumat ovat olleet normaalijakaumaan verrattuna merkitsevästi vinompia kaikilla vuosikymmenillä. Käytännössä tämä tarkoittaa sitä, että esimerkiksi noususuhdanteessa tuoton odotusarvo on positiivinen, mutta jakauman vasen häntä on pidempi tuottaen enemmän

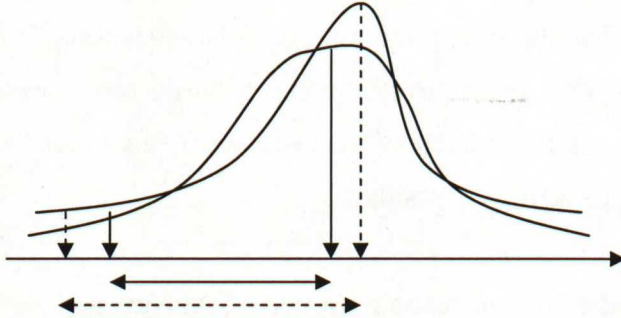


odotusarvoa pienempiä tuottoja. Korostan vielä sitä, että vaikka vasen häntä on pidempi voi itseisarvoltaan samansuuruisten negatiivisten ja positiivisten äärituottojen todennäköisyys olla silti sama. Chen ym. (2001) raportoivat mielenkiintoisia mikrotason tuloksia vinoudesta. Heidän havaintojen mukaan pienten yritysten tuotot ovat positiivisesti vinompia kuin suurten yritysten. Tutkijat perustelevat tulosta sillä, että pienillä yrityksillä on enemmän insentivejä olla raportoimatta huonoja uutisia kuin suurilla ja vakaila yrityksillä.

Normaalijakaumaa suuremman huipukkuuden on puolestaan osoitettu johtuvan volatilitietin jaksollisuudesta, mikä aiheuttaa jakauman häntien paksuuden sekä korkeamman huipun odotusarvon kohdalle (Engle 1982). Danielsson & Morimoto (2000) kuitenkin korostavat, ettei kausaalisuus ole molemminpuolista. Jakauman huipukkuuden ei välttämättä tarvitse implikoida paksuja häntiä. He ajavat yksinkertaisen Monte Carlo simulaation paksuhäntäisestä jakaumasta ja jättävät tämän jälkeen jakauman kahden prosentin hännät ulos otoksesta. Tämä aiheuttaa sen, että jakauman hännät muuttuvat normaalijakaumaa ohuemmiksi, mutta odotusarvon ympäriltä jakauma nousee huipukkaammaksi. Jakauman häntien ohenemisesta huolimatta huipukkuus säilyy silti selvästi normaalijakaumaa suurempana.

Poikkeavuudet normaalijakaumasta aiheuttavat parametrisessä VaR-estimoinnissa seuraavanlaisia ongelmia. Kuviossa 2. abskissan alapuoliset nuolet kuvaavat odotusarvon ja halutun VaR-prosentsipisteen välistä etäisyyttä eli reservipääoman määrää. Voimme havaita, että mikäli empiirisen jakauman odotusarvo on positiivinen, ja jakauma on huipukkaampi ja negatiivisesti vinompi kuin normaalijakauma, aliarvioi normaalijakaumaan perustuva VaR-ennuste reservipääoman tarpeen. Kuvion perusteella voidaan myös päätellä, että silloin kun odotusarvo on negatiivinen, ja empiirinen jakauma on huipukas ja positiivisesti vino, saattaa normaalijakaumaan pohjautuva VaR-estimointi tuottaa hyvinkin tarkkoja arvoja.

Kuvio 2. Normaalijakauma, huipukas ja vino jakauma



Perinteisessä parametrisessa VaR-estimoinnissa ei jakauman korkeampia momentteja huomioida lainkaan. Sitä vastoin ei-parametrisellä menetelmällä, kuten Monte Carlo simuloinnilla, voidaan rakentaa halutun muotoisia jakaumia. On kuitenkin huomioitava, että riittävän tarkkuuden saavuttamiseksi joudutaan Monte Carlo simulaatiossa ajamaan suuri määrä simulaatioita, joten menetelmä on parametrisen menetelmään verrattuna huomattavasti kalliimpi.

Li (1999) esitteli vaihtoehtoiseksi lähestymistavaksi semiparametristä menetelmää, joka ei ole yhtä rajoittunut kuin parametrinen menetelmä, mutta on samanaikaisesti edullisempi kuin Monte Carlo simulointi. Hän estimoi luottamusvälit siten, että jakauman prosenttipisteet määräytyvät odotusarvon ( $\mu$ ), keskihajonnan ( $\sigma$ ), vinouden ( $\gamma_1$ ) ja huipukkuuden ( $\gamma_2$ ) funktiona. Estimointimenetelmässä ei oleteta mitään ennalta tunnettua jakaumaa, vaan tulos on suurten otosten asymptoottiseen teoriaan perustuva approksimaatio. Luottamusvälipisteiden estimointi perustuu estimating functions – menetelmään (Godambe 1991), jonka tuloksena saadaan jakauman oikean  $X_U$  ja vasemman  $X_L$  hännän pisteiksi:

$$X_U = \mu + \frac{\frac{\gamma_2 + 2}{\gamma_1} + \sqrt{\left(\frac{\gamma_2 + 2}{\gamma_1}\right)^2 + 4 \left[ \frac{C_\alpha \sqrt{(\gamma_2 + 2)(\gamma_2 + 2 - \gamma_1^2)}}{\gamma_1} + 1 \right]}}{2} \sigma \quad (3.35)$$

$$X_L = \mu + \frac{\frac{\gamma_2 + 2}{\gamma_1} - \sqrt{\left(\frac{\gamma_2 + 2}{\gamma_1}\right)^2 + 4 \left[ \frac{C_\alpha \sqrt{(\gamma_2 + 2)(\gamma_2 + 2 - \gamma_1^2)}}{\gamma_1} + 1 \right]}}{2} \sigma, \quad \gamma_1 \neq 0$$



On tärkeää huomata, että luottamusvälin<sup>5</sup> päätepisteet (3.35) ovat määriteltyjä vain kun empiirinen jakauma poikkeaa normaalijakaumasta. Normaalijakauman tapauksessa on luottamusväli  $2C_\alpha\sigma$ , jossa  $C_\alpha$  viittaa normaalijakauman luottamustason  $\alpha$  pisteeseen.

Symmetriseen normaalijakaumaan verrattuna huomaamme eron siinä, että Li:n (1999) esittämässä semiparametrisessä menetelmässä luottamusväli elää jakauman muutosten mukana ja siirtyy sinne mihin suuntaan jakauma on vino. Normaalijakaumasta poikkeava huipukkuus paksuntaa jakauman häntiä ja nostaa jakauman korkeammaksi odotusarvon ympäriltä, jolloin luottamusvälin pituus kasvaa.

Esimerkiksi parametrien arvoilla  $\mu = 0$ ,  $\sigma = 1$ ,  $\gamma_1 = 0.7$  ja  $\gamma_2 = 2$ , saadaan 95% luottamusvälin alarajaksi -1.54 ja ylärajaksi 7.25. Koska vinous on positiivista siirtyy luottamusvälikin oikealle, mikä havaitaan siitä, että symmetrisen normaalijakauman alarajan piste -1.96 on kauempana vasemmassa hännässä. Ylärajan piste on sitä vastoin paljon kauempana oikealla kuin symmetrisessä jakaumassa (1.96).

Li (1999) testasi menetelmää valuuttamarkkinoilla MA-mallilla sekä EWMA-mallilla. Hän vertasi semiparametristä menetelmää normaalijakaumaan pohjautuvaan parametriseen menetelmään ja havaitsi semiparametrisen menetelmän tuovan estimointiin enemmän tarkkuutta molempien volatilititeettimallien kohdalla. EWMA-mallissa parannus oli vähäisempää, sillä malli pystyy generoimaan häntiin paksuutta jo parametrisessä menetelmässään.

Li:n (1999) saamat tulokset herättävät kuitenkin ihmetystä, sillä kaavasta (3.35) voidaan havaita, että vinouden lähestyessä nollaa kasvaa luottamusvälin pituus äärettömäksi. Li (1999) perustelee tulosta sillä, että lähellä nollaa emme voi olla varmoja kummalla puolella paksumpi ja pidempi häntä sijaitsee, joten luottamusvälin on oltava pidempi. Vastaavasti silloin, kun vinous eroaa merkitsevästi nolasta, tiedetään varmemmin kummalla puolella pidempi häntä sijaitsee. Ajatus mallin takana on kohdallaan, mutta mallin soveltaminen myöhempänä esiteltävään aineistooni tuotti luottamusvälille lähes kymmenkertaisen pituuden, ja luottamusväli oli siirtynyt lähes täysin

---

<sup>5</sup> Luottamusväli  $= X_U - X_L$ .

jakauman oikealle puolelle. Näin ollen pidän mahdollisena, että kaavassa on painovirhe. Mikäli kyseessä ei ole painovirhe, on mallin sovellettavuus ilmeisen rajattua.

Analogisesti voimme myös ajatella, että jos ei volatilitteetti säily ajassa vakiona, niin miksi korkeamman asteen momentitkaan säilyisivät muuttumattomina. Guermat & Harris (2002) tutkivat VaR-estimaatteja, kun jakauman volatilitteetti ja huipukkuus oletettiin ajalle ehdollisiksi. Tulokset osoittavat, että tällaisella mallilla päästään yleisesti tarkempiin tuloksiin kuin pelkillä ehdollisen volatilitteetin malleilla. Mallinnettaessa korkeamman asteen momenttien ehdollisuutta, on hyvä jälleen korostaa, että näin sofistikoitu mallinnus on varmasti kallista, joten kustannukset on muistettava suhteuttaa mallinnuksesta saavutettuun nettohyötyyn. Tämä korostuu erityisesti VaR-viitekehyksessä, sillä Value-at-Risk on yritysten käyttämä riskienhallintamenetelmä, jonka ylläpito vaatii resursseja.



## 4. Markkinadata ja mallien estimointi

### 4.1. Nasdaq-100 indeksi

Tutkimuksen aineistona käytetään Nasdaq teknologiapörssin Nasdaq-100 osakeindeksiä. Indeksikoostuu markkina-arvoltaan sadasta suurimmasta pörssiin listatusta yrityksestä.<sup>6</sup> Indeksiin kuuluvien yritysten painoarvoja päivitetään neljännesvuosittain, ja indeksin koostumus arvioidaan kerran vuodessa.<sup>7</sup>

Tuottojen laskennassa voidaan käyttää joko aritmeettista tai geometrista tuottoa. Aritmeettinen laskutapa  $(S_t/S_{t-1} - 1)$  antaa realistisen kuvan yhden periodin tuotoista, mutta jakaumatasolla laskutavan käyttö aiheuttaa epäsymmetriaa, sillä  $|S_t/S_{t-1} - 1| \neq |S_{t-1}/S_t - 1|$ , kun  $S_t \neq S_{t-1}$ . Symmetrisyyden parantamiseksi perustan analyysini geometrisiin päivätuottoihin, jotka lasketaan seuraavasti:

$$r_t = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right), \quad (4.1)$$

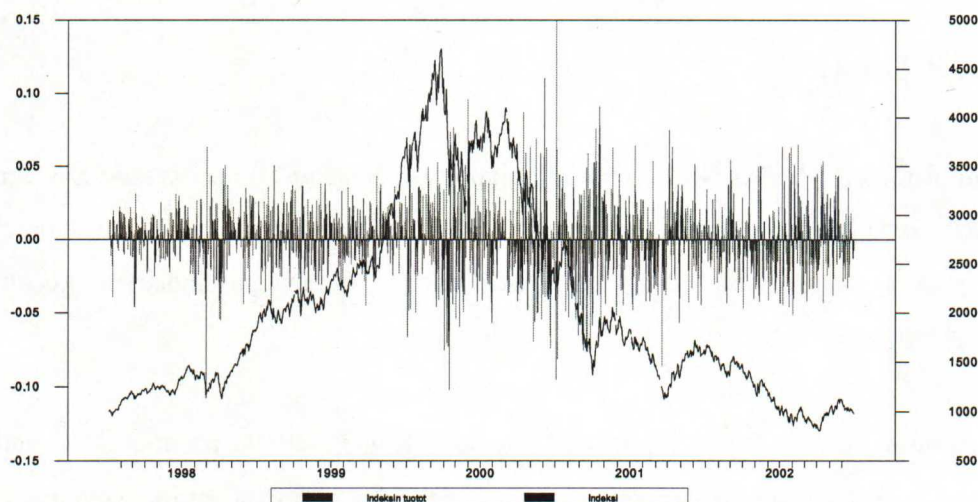
jossa  $S_t$  on indeksin arvo hetkellä  $t$ , ja  $S_{t-1}$  arvo hetkellä  $t-1$ .

Eri volatiliteettimallien tuottamien VaR-lukujen vertailu perustuu päivätuottoihin ajanjaksolta 1.1.1998-31.12.2002. Tuotot lasketaan päivän päätösarvoista kello 16:00 New Yorkin aikaa. Kuviosta 2. voimme havaita, että volatiliteetti ei ole vakioista vaan se vaihtelee ajassa hyvinkin voimakkaasti. Kuvio tarjoaa myös viitteitä volatiliteetin asymmetriasta, sillä hintojen nousun aikana jakson alkupuoliskolla on volatiliteetti selvästi pienempää kuin laskevien kurssien aikana jakson loppupuolella.

<sup>6</sup> Lukuunottamatta rahoitusalan yrityksiä

<sup>7</sup> [http://dynamic.nasdaq.com/dynamic/nasdaq100\\_activity.stm](http://dynamic.nasdaq.com/dynamic/nasdaq100_activity.stm)

Kuvio 3. Nasdaq-100 indeksi ja indeksin päivätuotot ajanjaksolla 1998-2002



Volatiliteetin jaksollisuutta ja asymmetriaa voimme tutkia myös numeerisesti Taulukosta 1. Ensimmäisen kahden ja puolen vuoden aikana keskimääräinen päivävaihtelu oli 2.48% (39.3% pa.), kun jälkimmäisellä periodilla volatilitetti oli 3.19% (50.4% pa.). Tuottosarjan keskimääräinen vinous oli positiivista, mutta jälleen voimme havaita, että vinouskaan ei säily vakioisena koko tarkasteluperiodin ajan. Nousevien kurssien aikana vinous oli negatiivista, mikä tarkoittaa, että jakauman vasen häntä oli pidempi. Laskevien kurssien aikana vinous oli positiivista, mikä implikoi sitä, että pienet ja negatiiviset tuotot ovat olleet yleisiä, mutta tyypillisesti loivaa alamäkeä seurasi suuri positiivinen korjausliike ylöspäin. Jakauman huipukkuus säilyi melko tasaisena koko periodin ollen hiukan normaalijakaumaa huipukkaampi.

Taulukko 1. Havaintosarjan keskeiset tunnusluvut.

	1/98-6/00	07/00-12/02	1/98-12/02
Keskiarvo	0.0021	-0.021	0,000
Keskihajonta	0.0248	0.0319	0.0286
Vinous	-0.283	0.4772	0.1812
Huipukkuus	4.4533	4.5896	4.6662
Jarque-Bera	<b>63.559</b>	<b>89.807</b>	<b>151.919</b>
Minimi	-0.1037	-0.0953	-0.1038
1%	-0.0649	-0.076	-0.0719
5%	0.039	-0.0481	-0.0446
Maksimi	0.096	0.172	0.172



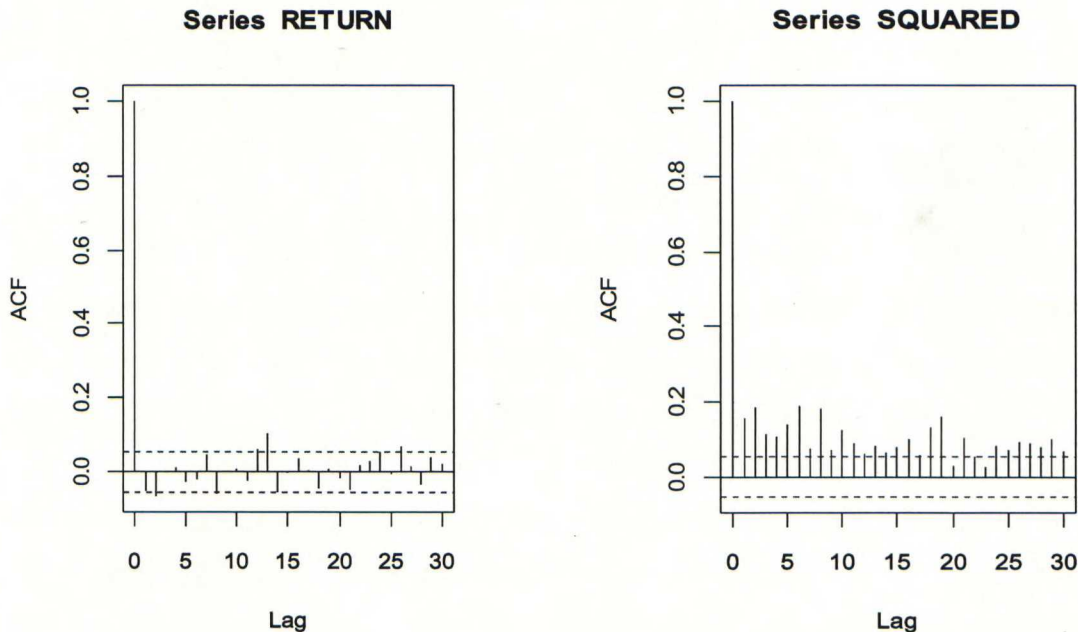
Jakauman normaalisuutta voidaan arvioida vinouden ( $S$ ) ja huipukkuuden ( $K$ ) perusteella tekemällä Jarque-Bera testi.

$$JB = \frac{n}{6} \left[ S^2 + \frac{(K-3)^2}{4} \right] \sim \chi^2_2 \quad (4.2)$$

Jarque-Bera testin nollahypoteesi olettaa jakauman normaaliseksi, joten hypoteesi jakauman normaalisuudesta hylätään kaikilla havaintojaksoilla. Testin 5% kriittinen arvo on 5.99.

Tuottosarjan autokorrelaatiota voidaan testata Ljung-Boxin (LB) Q-testillä autokorrelaatiofunktioista. Kahra & Kanto (1999) esittävät, että autokorrelaation merkitsevyyden karkeassa arvioinnissa voidaan kriittisenä arvona käyttää rajoja  $\pm 2/\sqrt{T}$ , jossa  $T$  on havaintojen lukumäärä. Rajoiksi saadaan tällöin  $\pm 0.0553$ , jotka on piirretty katkoviivalla Kuvioon 4.

Kuvio 4. Tuottojen ja neliöityjen tuottojen autokorrelaatiofunktioiden kuvaajat.



Ljung-Box Q-Statistics  
 Q(8) = 17.8705. Sign. Level 0.02221821  
 Q(16) = 43.3096. Sign. Level 0.00025097  
 Q(24) = 55.8014. Sign. Level 0.00024387

Ljung-Box Q-Statistics  
 Q(8) = 228.1922. Sign. Level 0.00000000  
 Q(16) = 308.2851. Sign. Level 0.00000000  
 Q(24) = 400.2384. Sign. Level 0.00000000

Kuvion 4. vasemmanpuoleisesta diagrammista voidaan havaita, että autokorrelaatio on melko pientä 12:een viiveeseen saakka. Kolmannessatoista viiveessä esiintyy autokorrelaatiota, mille on vaikea löytää perustelua, sillä yleensä autokorrelaatio havaitaan jo ensimmäisistä viiveistä. Autokorrelaatio voi johtua poikkeavasta havainnosta, joten sille ei tarvitse antaa enempää huomiota. LB-testi kuitenkin ehdottaa nollahypoteesin hylkäämistä ( $\alpha=0.05$ ), joten tuottosarja on autokorreloitunut.

ARCH-efektin löytämiseksi tutkimme neliöityjen tuottojen autokorrelaatiota. Kuvion 4. oikeanpuoleinen diagrammi paljastaa, että 12:ssa ensimmäisessä viiveessä esiintyy tilastollisesti erittäin merkitsevää autokorrelaatiota, ja LB-testisuureen perusteella voidaan todeta, että varianssiprosessi on lukuisten muiden empiiristen havaintojen tavoin autokorreloitunut. Huomionarvoista on myös se, että autokorrelaatio näyttäisi vaimenevan hitaasti, joten shokkien vaikutus säilyy prosessissa melko pitkään.

#### 4.2. GARCH-mallien estimointi

ARCH-efektin löytyminen antaa aiheen selvittää sitä miten hyvin ARCH-tyyppiset mallit onnistuvat selittämään havaittua ilmiötä. On kuitenkin huomioitava, että ennustuskyvyn mittaamiseksi on mallin parametrit estimoitava eri ajanjaksolta kuin VaR-luvut, sillä riskienhallinnassa riski muodostuu juuri epävarmasta tulevasta kehityksestä. Toisaalta, jos mallin ennustuskkyky on huono, on mielenkiintoista selvittää, että johtuuko mallin heikkous dynamiikan muutoksista, vai onko mallityyppi yleisesti jostain syystä vain sopimaton kyseiselle markkinalle. Mikäli tulokset osoittavat heikkouden johtuvan markkinoiden muutoksista, voimme tehdä myös herkkyysanalyysia mallin parametrien muutoksen vaikutuksesta VaR-lukujen tarkkuuteen.

Vertailu voidaan käytännössä toteuttaa siten, että estimoidaan optimaalinen ARCH-tyyppinen malli myös siitä aineistosta, jota pyrimme ennustamaan. Taulukossa 2. on eri ajanjaksoilta estimoitujen mallien Akaiken (AIC) ja Bayesin (BIC) informaatiokriteerien arvoja, joiden avulla voimme arvioida mallien sopivuutta tarkasteltuun aineistoon. Mallien valinnassa on perusajatuksena valita malli, jonka logaritmoidun uskottavuusfunktion arvo on suurin. Uskottavuusfunktion arvoa saadaan helposti kasvatettua sillä, että valitaan malleihin paljon



parametreja. Kuten aiemmin totesin, on ekonometriassa malleja rakennettaessa pyrkimyksenä rakentaa mahdollisimman vähäparametrisia malleja. Informaatiokriteerit<sup>8</sup> ottavat uskottavuusfunktion arvon lisäksi huomioon myös parametrien lukumäärän, minkä johdosta kriteerien käyttö on perusteltua.

*Taulukko 2. GARCH(p,q) mallien informaatiokriteerit kahdelta viiden puolen periodilta*

	1993-1997		1998-2002	
	AIC	BIC	AIC	BIC
GARCH(0,1)	-9623.02	-9607.594	-7685.241	-7668.839
GARCH(1,0)	-9604.048	-9588.621	-7706.268	-7690.865
GARCH(1,1)	<b>-9705.556</b>	<b>-9684.988</b>	<b>-7844.649</b>	<b>-7824.113</b>
GARCH(0,2)	-9643.028	-9622.463	-7734.535	-7713.999
GARCH(1,2)	-9695.9	-9670.194	-7836.395	-7810.725
GARCH(2,1)	-9695.657	-9669.951	-7844.43	-7818.759
GARCH(2,2)	-9694.659	-9663.812	-7844.805	-7814

Informaatiokriteerien perusteella näyttäisi GARCH(1,1) malli sopivan aineistoon parhaiten molemmilla ajanjaksoilla. Estimointi tuotti mallien parametreille seuraavat arvot:

$$h_t = 0.000002622 + 0.05132\varepsilon_{t-1}^2 + 0.9357h_{t-1} \quad (4.3)$$

(2.385)      (6.158)      (74.890)

$$h_t = 0.00001503 + 0.1014\varepsilon_{t-1}^2 + 0.8828h_{t-1} \quad (4.4)$$

(2.438)      (5.644)      (41.973)

Varianssiyhtälö (4.3) on estimoitu ajanjaksolta 1993-1997 ja (4.4) periodilta 1998-2002. Luvut sulkeissa ovat parametrien t-arvoja, joiden perusteella voidaan todeta, että yhtälöiden kaikki parametrit ovat tilastollisesti merkitseviä ( $\alpha = 0.05$ ). Varianssiyhtälöiden virhetermien ja ehdollisen varianssin parametrien summa 0.982 kertoo siitä, että shokkien vaikutus säilyy prosessissa melko pitkään. Summa on kuitenkin alle yhden, joten varianssiprosessi näyttäisi

<sup>8</sup>  $AIC = T * \ln(RSS) + 2n$

$BIC = T * \ln(RSS) + n * \ln(T)$

$RSS = \log$ -uskottavuusfunktion arvo,  $n =$  estimoitujen parametrien lukumäärä ja  $T =$  havaintojen lukumäärä.

olevan kovarianssistationaarinen. Shokin puoliintumisajan voidaan yhtälön (3.17) perusteella arvioida olevan noin 52-53 päivää.

Hyvässä volatilititeettimallissa heteroskedastisuuskorjattujen virhetermien tulisi olla

$$z \sim NID(0,1), \quad \text{jossa } z_t = \frac{\hat{\varepsilon}_t}{\sqrt{\hat{h}_t}} \quad (4.5)$$

Taulukosta 3. havaitaan, että aikaisemmalta ajanjaksolta estimoidun mallin residuaalien normaalisuusoletus on hylättävä, sillä Jarque-Bera testisuureen arvo ylittää kriittisen arvon 5.99. Samassa mallissa residuaalien autokorrelaatio on myös merkitsevää, joten malli ei istu yhtä hyvin aineistoon kuin jälkimmäiseltä ajanjaksolta estimoitu malli. Jälkimmäisessä mallissa normaalisuusoletus hyväksytään ( $p=0.114$ ), eikä residuaalien kahdeksassa ensimmäisessä viiveessä näyttäisi esiintyvän autokorrelaatiota. Neliöityjen residuaalien Q-testin arvoista havaitaan, että kummankaan ajanjakson malleissa ei esiinny autokorrelaatiota, joten molemmat mallit ovat onnistuneet huomioimaan ARCH-efektin.<sup>9</sup>

Taulukko 3. GARCH(1,1) mallien standardoidut residuaalit.

$Q(k)$  viittaa Ljung-Box testin arvoon. Tummennetut arvot ovat tilastollisesti merkitseviä ( $\alpha=0.05$ )

	Residuaalit	
	1993-1997	1998-2002
Keskiarvo	0.0569	0.002
Keskihajonta	0.9973	0.9975
Vinous	-0.3796	-0.0495
Huipukkuus	4.38022	3.2682
Jarque Bera	<b>131.285*</b>	4.343
Q(8)	<b>19.193*</b>	7.876
	Neliöidyt residuaalit	
	1993-1997	1998-2002
Q(8)	7.2663	5.4937
Q(16)	12.999	10.999
Q(24)	17.08	21.729

<sup>9</sup> Neliöityjen tuottojen autokorrelaatio oli merkitsevää myös ajanjaksolla 1993-1997.  $Q(8) = 95.1435$ . Q-testin kriittiset arvot ( $\alpha=0.05$ ) ovat:  $Q(8)=15.507$ ,  $Q(16)=26.296$ ,  $Q(24)=36.415$ .



Seuraavaksi selvitan sitä, miten hyviä asymmetrisen volatilitteen malleja pystytään rakentamaan varsinaiselta tarkastelujaksolta. Jos mallit ovat hyviä, estimoin mallit myös aikaisemmalta 1993-1997 ajanjaksolta.

Taulukosta 4. havaitaan, että aineistoon näyttäisi sopivan parhaiten EGARCH(1,1)-malli sekä GJR(1,0)-malli. Diagnostiset tarkistukset kuitenkin paljastavat (Taulukko 5.), että kyseisissä malleissa esiintyy suuria ongelmia. Heteroskedastisuuskorjatut virhetermit eivät ole normaalisia kummassakaan mallissa. Tämän lisäksi virhetermien keskihajonta on moninkertainen standardoituun normaalijakaumaan verrattuna. Neliöityjen virhetermien Ljung-Box testisuureen arvot paljastavat, etteivät mallit ole kenneet mallintamaan kaikkea heteroskedastisuutta.

Taulukko 4. EGARCH- ja GJR-mallien AIC- ja BIC-informaatiokriteerien arvoja eri  $p:n$  ja  $q:n$  arvoilla.

Malli	EGARCH		GJR	
	AIC	BIC	AIC	BIC
(0,1)	-7677.398	-7656.865	-7689.488	-7668.955
(1,0)	-7642.5	-7621.967	<b>-7870.07</b>	<b>-7849.537</b>
(1,1)	<b>-7862.821</b>	<b>-7837.154</b>	-7868.495	-7842.829
(0,2)	-7742.142	-7716.479	-7731.481	-7705.819
(1,2)	-7853.537	-7822.742	-7862.639	-7831.844
(2,1)	-7691.593	-7660.798	-7859.179	-7828.384
(2,2)	-7851.536	-7818.609	-7861.076	-7825.149

Taulukko 5. EGARCH(1,1)- ja GJR-mallien virhetermit. Tummennetut arvot ovat 5% merkitsevyystasolla tilastollisesti merkitseviä

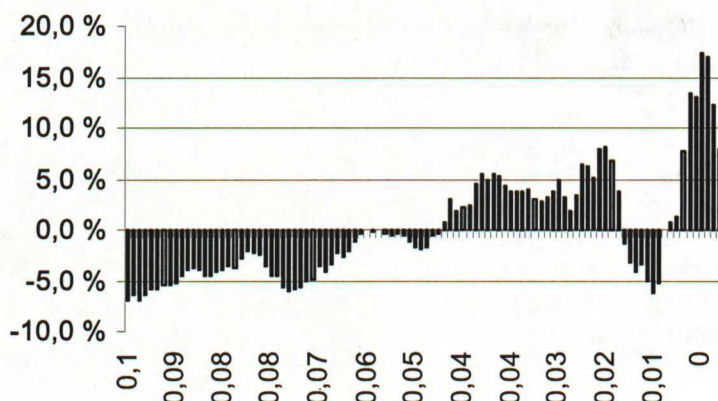
	Residuaalit	
	EGARCH(1,1)	GJR(1,0)
Keskiarvo	0.0127	-0.0473
Keskihajonta	41.227	40.952
Vinous	-0.5045	-0.34661
Huipukkuus	6.0038	4.79071
Jarque Bera	<b>524.642*</b>	<b>192.656*</b>
Q(8)	4.5888	2.9914
	Neliöidyt residuaalit	
	1993-1997	1998-2002
Q(8)	<b>40.1962*</b>	<b>23.1264*</b>
Q(16)	<b>55.4429*</b>	<b>31.0483*</b>
Q(24)	<b>65.4396*</b>	<b>42.9157*</b>

Tulos herättää luonnollisesti kysymyksen, että eikö kyseisellä ajanjaksolla esiinny asymmetriaa. Jakauman asymmetriaominaisuuksia voimme tarkastella Kuviosta 5, jossa on muodostettu suhdelukuja

$$\frac{(1-p) - \bar{x}}{|p - \bar{x}|}, \quad (4.6)$$

jossa  $p$  viittaa havaintosarjan  $p$ -fraktiilin arvoon.

Kuvio 5. Jakauman oikean hännän pisteen  $(1-p)$  etäisyys keskiarvosta suhteessa vasemman hännän pisteen  $p$  etäisyyteen keskiarvosta.



Voimme havaita, että 10 prosentin kohdalla on vasen häntä oikeaa häntää paksumpi. Häntien ääripäitä lähestyttäessä neljän prosentin jälkeen on oikea häntä vasenta häntää paksumpi. Asymmetria näyttäisi vaihtelevan hännissä melkoisesti, mikä luultavasti häiritsee mallien estimointia. Polasek & Pojarliev (2001) rakensivat asymmetriset EGARCH- sekä AGARCH-mallit myös Nasdaq-100 indeksistä, mutta estimoinnissa he käyttivät eri ajanjaksoa kuin tässä tutkimuksessa. Danielsson & Morimoto (2000) esittävät, että EGARCH-mallin estimoinnissa saadaan melko harvoin parametreille merkitseviä arvoja. Saaduista tuloksista johtuen en voi käyttää asymmetrisen volatilitietin malleja.



### 4.3. VXN indeksi

VXN indeksi on Chicagon optiopörssiin (CBOE) vuonna 2001 rakennettu volatilitieetti-indeksi. Lyhyestä historiasta huolimatta on indeksille laskettu päivän päätösarvoja vuodesta 1995 lähtien, joten indeksia on mahdollista hyödyntää myös tieteellisissä tutkimuksissa. Tämän tutkimuksen molemmat indeksit on hankittu Datastream markkinatietopalvelun tietokannasta.

VXN indeksin arvo lasketaan kahdeksan osto- ja myyntioption implisiittisen volatilitieetin painotetusta keskiarvosta. Optiot valitaan indeksiin siten, että volatilitieetti-indeksin maturiteetti on jatkuvasti 30 päivää. Jotta indeksi ei altistuisi epätavallisen voimakkaille hinnanvaihteluille, mikä on tyypillinen ilmiö option erääntymisviikolla, on yksittäisen option maturiteetti rajattu kahdeksaan päivään. Maturiteettiehtojen lisäksi indeksiin valittujen optioiden toteutushintojen tulee olla mahdollisimman lähellä markkinahintaa, millä pyritään minimoimaan volatility-smile ilmiön vaikutusta.<sup>10</sup>

VXN-indeksin implisiittinen volatilitieetti pohjautuu kalenteripäivien lukumäärään (Schwert 2002). Oletus kalenterivuodesta on osakemarkkinoilla hieman harhaanjohtavaa, sillä vuodessa on keskimäärin 250 kaupankäyntipäivää. Davidson ym. (2001) raportoivat, että vuositason volatilitieetin muuntaminen päivätasolle olisi järkevää perustaa kaupankäyntipäiviin. He viittaavat aiempiin tutkimuksiin, joissa on havaittu viikonlopun volatilitieetin olevan vain hiukan muita kaupankäyntipäiviä suurempaa. Viikonlopun volatilitieettiä voidaan tutkia perjantain ja maanantain päätöshintojen perusteella lasketusta viikonlopun neliöidytä tuotosta. Davidson ym. (2001) tähdentävät, ettei tulosta voi kuitenkaan yleistää. Esimerkiksi maataloustuotteiden futuurit ovat herkkiä säiden muutoksille, jolloin on luonnollista olettaa, että viikonloppuna 72 tunnin ajanjaksolla riski säiden muutoksista on suurempi kuin 24 tunnin aikana.

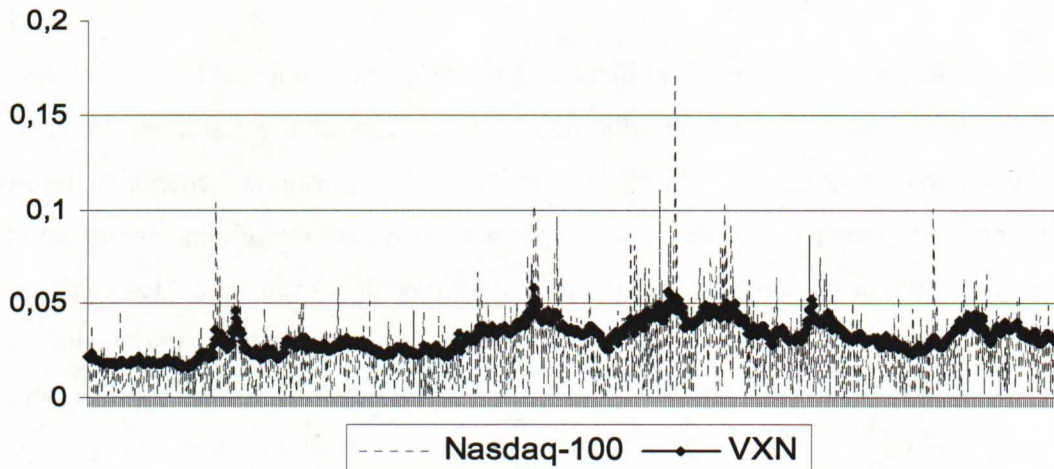
<sup>10</sup> VXN indeksistä ei löydy riittävän kattavaa kuvausta Chicagon optiopörssin internet-sivuilta. Indeksä on kuitenkin analoginen S&P 100 indeksiin pohjautuvan VIX-indeksin kanssa, jonka teoriakehikosta on indeksin kehittäjä Robert E. Whaley (2000) kirjoittanut artikkelin.

Kaupankäyntipäiviin perustuvan päivätason volatiliteetin voimme laskea Whaley'n (1993; ks. Davidson ym. 1993) mukaan seuraavasti:

$$IV_t = \frac{VXN_t}{\sqrt{250}} \quad (4.7)$$

Aineiston havainnot ovat päivän päätösarvoja samalta hetkeltä kuin Nasdaq-100 indeksin arvot. Kuviosta 6. voimme tehdä karkean tason arvioita siitä, kuinka hyvin VXN indeksi ennustaa Nasdaq-100 indeksin volatiliteettia. VXN-indeksi näyttää seuraavan Nasdaq-100 indeksin volatiliteetin kehitystä hyvin tarkasti. Visuaalisesti ei kuitenkaan voida havaita, että VXN ennakoisi tulevia shokkeja kovin tehokkaasti.

Kuvio 6. Nasdaq-100 indeksin volatiliteetti ja VXN-indeksin kaupankäyntipäiviin perustuvat päivätason arvot. Nasdaq-100 indeksin volatiliteettina käytetään arvoa  $\sqrt{r_t^2}$





## 5. Tulokset

### 5.1. Volatiliteetin ennustaminen

Käsittelen tässä kappaleessa liukuvan keskiarvon- ja eksponentiaalisen liukuvan keskiarvon menetelmän, kahdelta ajanjaksolta estimoidun GARCH-mallin sekä implisiittisen volatiliteetin antamia volatiliteettiennusteita. Mallien ennustuskkyä voidaan havainnoida korrelaatiogrammeista (Liite 1). Visuaalisesti yksikään malli ei näytä erottuvan edukseen, ja korrelaatio näyttäisi olevan yleisesti melko vähäistä. Diagrammeissa herättää huomiota yksi poikkeava havainto. Toisena kaupankäyntipäivänä vuosituhannen vaihtumisen (3.1.2001) jälkeen koettiin 17.2% prosentin tuotto. Kahtena edellisenä kaupankäyntipäivänä oli volatiliteetti ollut keskimääräistä korkeampaa, mutta yleisesti edeltävinä päivinä oli vaihtelu melko pientä, joten historiaan pohjautuvat volatiliteettimallit epäonnistuivat ennustamaan suuren muutoksen. Implisiittinen volatiliteetti oli sitä vastoin korkealla muutamana edellisenä päivänä ja antoi 2.1.2001 seuraavan päivän volatiliteetille ennusteen 5.37%, mikä oli 47% korkeampi kuin korkeinta volatiliteettia ennustanut historiallinen malli.

Volatiliteettimallien ennustuskyyvyn tilastolliseen testaukseen voidaan käyttää lineaarista regressiomallia (3.31). Varianssimuotoisesta esitystavasta poiketen käytän selitettävänä muuttujana termiä  $\sqrt{r_t^2}$ . Selittäjänä käytän volatiliteettimallin hetkellä  $t-1$  ennustamaa seuraavan periodin tuoton keskihajontaa.

*Taulukko 6. Regressiomallin kertoimet volatiliteettimallien ennustuskyyvyn testauksessa. Harhattomassa mallissa  $\alpha = 0$  ja  $\beta = 1$ . 5%-merkitsevyystasolla kriittinen t-arvo on  $\pm 1.96$ .  $R^2$  viittaa mallien selityssasteeseen. MA = liukuvan keskiarvon malli (50pv.), EWMA = eksponentiaalinen liukuvan malli, GARCH1 = ajanjaksolta 1993-1997 estimoitu GARCH(1,1)-malli, GARCH2 = ajanjaksolta 1998-2002 estimoitu GARCH(1,1)-malli ja IV = VIX-indeksin implisiittinen volatiliteetti.*

	$\alpha$	t-arvo	$\beta$	t-arvo	$R^2$
MA	0.0077	4.992	0.515	9.765	0.071
EWMA	0.0039	2.442	0.664	12.059	0.104
GARCH1	0.0034	2.090	0.742	12.164	0.106
GARCH2	0.0026	1.587	0.699	12.198	0.106
IV	-0.0063	-3.387	0.896	15.629	0.163

Taulukosta 6. havaitaan, että GARCH2-mallissa voimme olettaa vakiotermin  $\alpha$  olevan nolla, mutta muissa malleissa on nollahypoteesista luovuttava. Regressiomallien kulmakertoimet ovat kaikki tilastollisesti merkitseviä ja vaihtelevat 0.515-0.896. Harhattomassa volatiliteettimallissa tulisi parametrin  $\beta$  olla lähellä yhtä. Jos kulmakerroin poikkeaa yhdestä, sisältyy ennusteisiin selittämätöntä systematiikkaa, joka saa mallin yli- tai aliarvioimaan tulevaa volatiliteettia. Näyttäisi siltä, että historialliset mallit antavat keskimäärin rohkeampia ennusteita kuin tulevaisuuden odotuksia sisältävä implisiittinen volatiliteetti. Testaamalla hypoteesia  $\beta = 1$  saamme lopullisen selvyuden mallien harhaisuudesta. Tulokset osoittavat, että ainostaan IV:n  $\beta$ -parametri ei eroa merkitsevästi yhdestä ( $p=0.24$ ). IV-mallin vakioparametri eroaa kuitenkin merkitsevästi nolasta, joten yhdenkään mallin ei voida katsoa tuottavan täysin harhattomia volatiliteettiestimateja.

Volatiliteettimallien tarkkuutta voimme arvioida regressiomallien selitysasteesta. Implisiittisen volatiliteetin selitysvoima on selvästi historiallisia malleja parempi, mikä on yhdenmukainen lukuisten muiden tulosten kanssa.<sup>11</sup> Heteroskedastisuuden huomioivien EWMA-mallin ja GARCH-mallien selitysasteessa ei ole juurikaan eroa. MA-malli osoittautuu heteroskedastisia malleja heikommaksi, mikä tukee muun muassa Polasekin & Pojarlievin (2001) havaintoja.

Seuraavaksi tutkin kahden muuttujan regressiofunktiolla implisiittisen volatiliteetin sisältämän informaation riittävyyttä volatiliteetin ennustamisessa. Caninan & Figlewskin (1993) esittämän testiproseduurin mukaisesti muodostetaan regressioyhtälö

$$RV_t = \alpha + \beta IV_{t-1} + \gamma HV_{it-1} + e, \quad (5.1)$$

jossa  $RV_t$  viittaa hetken  $t$  toteutuneeseen volatiliteettiin.  $IV_{t-1}$  on hetkellä  $t-1$  havaittu implisiittinen volatiliteetti ja  $HV_{it-1}$  on historiallisten volatiliteettimallin  $i$  antama ennuste hetkellä  $t-1$ . Mikäli historiallisen mallin parametrin  $\gamma$  arvo ei poikkea tilastollisesti merkitsevästi nolasta, voidaan implisiittisen volatiliteetin todeta sisältävän kaiken relevantin informaation tulevasta volatiliteetista.

---

<sup>11</sup> Ks. Poon & Granger (tulossa)



Taulukko 7. Regressioyhtälön (5.1) parametrien arvot.  $R^2$  on mallien parametrien lukumäärällä korjattu selitysaste. T-testin kriittinen arvo on  $\pm 1.96$ .

	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$R^2$
IV+MA	-0.006	1.025	-0.1513	0.1647
t-arvo	-3.331	11.949	-2.019	
IV+EWMA	-0.007	1.074	-0.193	0.1643
t-arvo	-3.572	9.600	-1.856	
IV+GARCH1	-0.007	1.067	-0.205	0.1641
t-arvo	-3.528	9.452	-1.760	
IV+GARCH2	-0.006	0.959	-0.074	0.1624
t-arvo	-3.367	9.265	-0.739	

Taulukosta 7. voidaan havaita, että MA-mallia lukuun ottamatta historialliset volatiliteettimallit eivät tarjoa uutta informaatiota tulevasta volatiliteetista. MA-mallin parametrin  $\gamma$  arvo poikkeaa merkitsevästi nolasta ( $p = 0.043$ ), joten malli näyttäisi sisältävän sellaista informaatiota, jota seuraavan 30 päivän volatiliteettia ennustava implisiittinen volatiliteetti ei huomioi. Kun verrataan IV:n ja MA-mallin yhteisennusteen selitysastetta (0.1647) implisiittisen volatiliteetin selitysasteeseen (0.163), havaitaan historiallisen mallin tuovan ennusteisiin hieman lisätarkkuutta. Tulos on mielenkiintoinen, sillä MA-malli on historiallisista malleista yksinkertaisin ja sen selitysvaikutus havaittiin heikoimmaksi. Taulukon 6. kulmakertoimien arvoja tutkittaessa havaitaan, että MA yliarvioi volatiliteettia kaikkein selvimmin, ja IV näyttäisi yliarvioivan tulevaa volatiliteettia vähiten. Tilastollinen selitys tulokselle voisi olla se, että IV+MA regressiofunktiossa olisi vähemmän multikollineaarisuutta kuin muissa regressiofunktioissa. Taulukko 8. osoittaa, että IV:n ja MA:n välinen korrelaatio on pienempää kuin IV:n ja muiden historiallisten mallien tuottamien estimaattien välillä. Korrelaatioissa ei kuitenkaan esiinny suuria eroja, joten multikollineaarisuus tuskin tarjoaa täysin kattavaa selitystä.

Taulukko 8. Mallien ennusteiden väliset korrelaatiot.

	MA	EWMA	GARCH1	GARCH2
IV	0.74	0.86	0.86	0.83

Huolimatta IV:n lievästä harhaisuudesta ja MA:n tuomasta lisäinformaatiosta, tuottaa implisiittinen volatiliteetti vähiten harhaisia ja selvästi tarkimpia volatiliteetin estimaatteja.

## 5.2. Volatiliteettimallit VaR-estimoinnissa

Esittelen seuraavaksi eri volatiliteetin ennustusmenetelmien tuloksia VaR-viitekehyksessä. Määritän parametrisellä menetelmällä 95% ja 99% päivittäisiä VaR-ennusteita eri volatiliteettimalleilla. Käytännön sovelluksena voidaan ajatella kuvitteellista sijoittajaa, joka ostaa Nasdaq-100 indeksiä 1.1.1998 ja haluaa viiden vuoden ajan jokaisena päivänä markkinoiden sulkeuduttua arvion seuraavan kaupankäyntipäivän markkinariskistä.

VaR-lukujen liiketaloudelliseen arviointiin ei ole kehitetty standardikriteereitä. Engel & Gitzky (1999) ja Hendricks (1996) perustavat arvioinnin kolmea kriteeriin: konservatiivisuuteen, tarkkuuteen ja tehokkuuteen. Myös tässä tutkimuksessa käytetään VaR-lukujen arviointiin edellä kappaleessa 2.6. tarkemmin esiteltyjä kriteereitä.

### 5.2.1. Konservatiivisuus

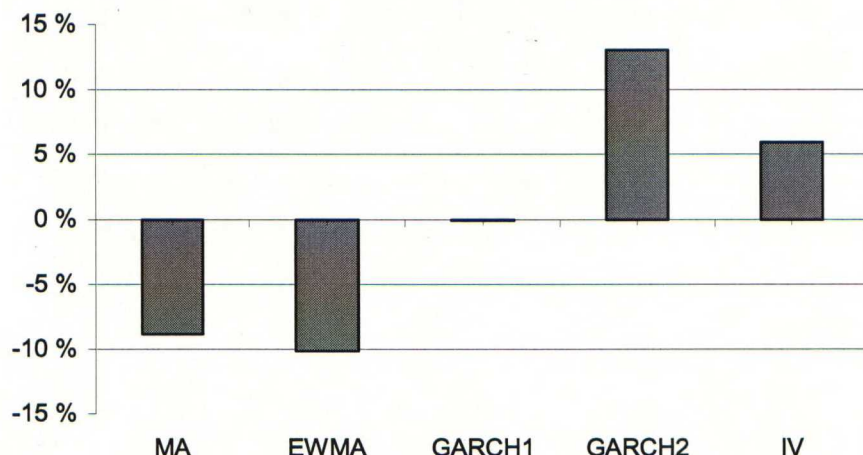
VaR:n konservatiivisuutta testataan keskimääräisellä suhteellisella harhaisuudella (mean relative bias, MRB) sekä keskimääräisellä vaihtelevuudella. MRB kuvaa estimaattien suuruutta suhteessa  $N:n$  VaR-mallin keskiarvoon  $T:n$  havainnon aikasarjassa.

$$MRB = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{VaR_{it} - \overline{VaR_t}}{\overline{VaR_t}}, \text{ jossa } \overline{VaR_t} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N VaR_{it} \quad (5.2)$$

Kuviosta 7. nähdään, että MA- ja EWMA menetelmät antavat keskimääräistä pienempiä riskiarvioita. EWMA-menetelmän ennusteet ovat pienempiä kuin MA-menetelmän, mikä on yhdenmukaista Hendricksin (1996) tulosten kanssa. GARCH2 ja IV antavat sitä vastoin selvästi muita malleja konservatiivisempia reservipääomavaatimuksia. Huomionarvoista on, että heteroskedastisten mallien poikkeavuudet keskiarvosta vaihtelevat välillä -10%-13%.



Kuvio 7. Keskimääräinen suhteellinen harhaisuus



VaR-estimaattien volatilitteettia testataan mallien keskihajonnalla.

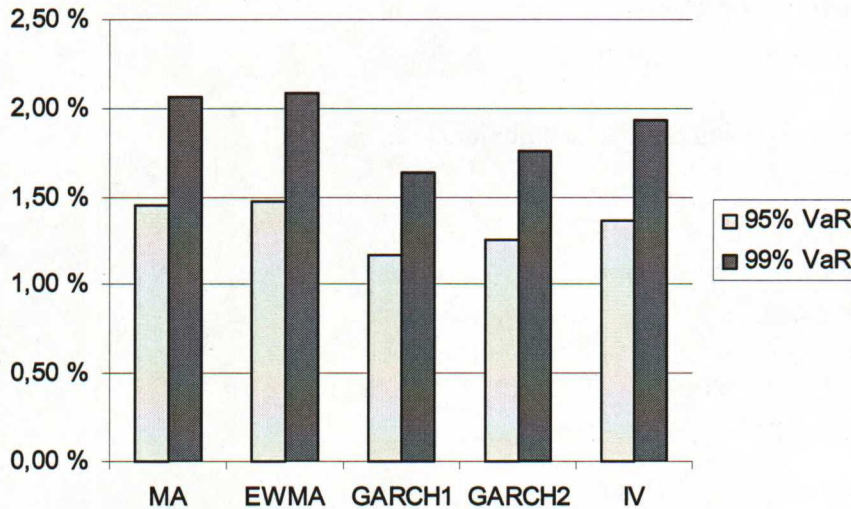
$$\sigma_{VaR} = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^T (VaR_{it} - \overline{VaR_i})^2}{T-1}}, \text{ jossa} \quad (5.3)$$

$$\overline{VaR_i} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T VaR_{it}$$

On syytä korostaa, että kunkin mallia vaihtelua verrataan nyt mallin tuottaman havaintosarjan oman keskiarvoon, joten mallien keskinäisessä vertailussa on huomioitava skaalausero. Engel & Gizecki (1999) sekä Hendricks (1996) käyttävät tästä johtuen myös MRB:stä johdettua Root Mean Square of Relative Bias (RMSRB) mittaria, jossa hetken  $t$  VaR-estimaatin poikkemaa verrataan kaikkien mallien estimaateista laskettuun hetken  $t$  keskiarvoon. Poikkeama neliöidään ja suhteutetaan keskiarvoon. En käytä tässä tuota menetelmää siitä syystä, että eri mallien suhteelliset harhaisuudet ovat suuria, mistä johtuen yhteiseen keskiarvoon suhteuttaminen antaa suuria RMSRB-arvoja, vaikka mallin tuottamien ennusteiden vaihtelu olisi pientä. Yrityksen riskienhallinnan näkökulmasta on kiinnostavampaa selvittää nimenomaan sitä, miten valittu volatilitteen estimointimenetelmä vaikuttaa VaR-lukujen vaihtelevuuteen.

Kuviosta 8. havaitaan, että pienin volatilitteetti on GARCH1-mallilla, ja suurinta vaihtelua esiintyy EWMA-menetelmän käytössä. Käytännössä tulos tarkoittaa sitä, että EWMA-menetelmän käyttäjät tekevät päivittäin keskimäärin 1.48 prosentin muutoksia reservipääoman määrään, kun GARCH1-mallilla volatilitteettia ennustava riskienhallintayksikkö tekee vain 1.17 prosentin muutoksia. Erot näyttävät pieniltä, mutta kun huomioidaan, että pankkien reservipääoman määrien yhteydessä puhutaan miljardeista euroista, tarkoittaa 0.3 prosentin ero VaR-estimaattien volatilitteetissa rahallisesti suurta eroa reservipääoman muutoksista aiheutuviin kaupankäyntikustannuksiin.

Kuvio 8. VaR-ennusteiden volatilitteetti



### 5.2.2. Tarkkuus

VaR-estimaattien tarkkuuden selvittämiseen sovelletaan Kupiec (1995; ks. Jorion 1998, 134-136) testiä. Testissä lasketaan empiirisen tuottosarjan niiden havaintojen lukumäärä, jotka ylittävät VaR:n. Jos VaR-estimointimenetelmä on tarkka  $T$  päivää käsittävän havaintojakson aikana, tulisi VaR:n ylityksiä olla luottamustasolla  $(1-p^*)$  määrä  $N$ , jossa  $N/T=p^*$ . Ylitysten  $N$  todennäköisyys  $T$ :n pituisessa aikasarjassa voidaan määrittää binomitodennäköisyytenä:



$(1-p)^{T-N} p^N$ . Kupiec esittää, että nollahypoteesin  $p=p^*$  testaamiseen sopivin testi on osamäärätesti:

$$-2 \ln[(1-p^*)^{T-N}] + 2 \ln[(1-N/T)^{T-N} (N/T)^N] \quad (5.4)$$

Testisuure noudattaa Khin neliö-jakaumaa vapausasteella yksi.

Mallien tarkkuuden selvittäminen paljasti yllättäviä tuloksia. MA- sekä EWMA menetelmiin pohjautuvat VaR-estimoinnit näyttävät tuottavan tilastollisesti merkitsevän tarkkoja tuloksia molemmilla luottamustasoilla. GARCH1 malli tuottaa tarkkoja ennusteita 99% luottamustasolla, mutta 95% tasolla on nollahypoteesista luovuttava. GARCH2 sekä IV osoittautuvat yliarvioivan reservipääoman määrää molemmilla luottamustasoilla

Taulukko 9. Ylityksien  $N$  osuus 1253 havainnon sarjassa sekä Kupiecin testin tulokset.  $\alpha=0.05$

	N/T	95 % testisuure	p-arvo	N/T	99 % testisuure	p-arvo
MA	4,549 %	0,552	0,457	1,038 %	0,018	0,894
EWMA	5,188 %	0,092	0,762	0,718 %	1,114	0,291
GARCH1	3,352 %	8,065	0,005	0,559 %	2,934	0,087
GARCH2	2,155 %	26,904	0,000	0,319 %	7,984	0,005
IV	2,155 %	23,419	0,000	0,160 %	13,809	0,000

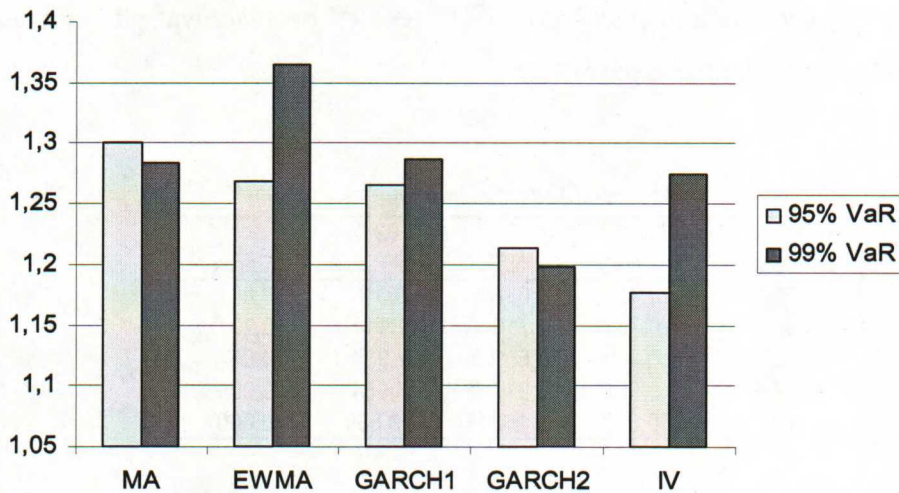
Vaikuttaisi siltä, että heteroskedastiset mallit yliarvoivat ennusteissaan vasemman hännän paksuutta. Liitteestä 2. havaitaan, että tarkkailujakson todennäköisyysjakauma on normaalijakaumaa ohuempi 5%-n tasolla, mutta aivan jakauman hännässä on empiirinen jakauma normaalijakaumaa paksumpi. Liitteessä 2. on vasemmalla alhaalla vertailtu empiirisen todennäköisyysjakauman ja normaalijakauman eroja vasemman hännän eri pisteissä. Kuviosta voidaan nähdä, että empiirinen jakauma on noin 5% normaalijakaumaa ohuempi tarkasteltaessa 95% VaR-estimaatteja. Jakauman hännässä 99%-tasolla näyttää empiirinen jakauma olevan lähes 10% paksumpi kuin normaalijakauma, minkä valossa GARCH-mallien ja IV:n tulokset näyttävät vielä erikoisemmilta. Ainoa selitys lienee se, että kyseiset menetelmät näyttävät mallintaneen vielä paksumpia häntiä.

Ylitysten määrän lisäksi on relevanttia tutkia myös ylityksien suuruutta. Engel & Gizycki (2001) käyttävät tähän suhdelukujen keskiarvoa:

$$\overline{X}_i = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M X_m, \text{ jossa } M \text{ on ylitysten määrä} \quad (5.5)$$

$$X_m = \frac{r_{it}}{VaR_{it}}, \text{ jos } r_{it} < VaR_{it}$$

Kuvio 9. Ylitys/VaR suhdeluvut



Jos tuottojakauma on jakautunut normaalisesti ja VaR on tarkka riskin mitta, tulisi suhdeluvun olla 1.25 ja 1.14 luottamustasoilla 95% ja 99%.

Kuviosta 9. nähdään, että 95% luottamustasolla MA:n, EWMA:n sekä GARCH1:n ylitykset ovat suurempia kuin normaalijakauman viitearvo. GARCH2 ja IV, jotka kuvion 7. perusteella näyttävät tuottavan konservatiivisimpia VaR-estimaatteja, onnistuvat luonnollisesti myös minimoimaan ylitysten suuruuden. On huomionarvoista, että MA-menetelmää käytettäessä ylitykset ovat keskimäärin 11% suurempia kuin IV-estimaatteihin perustuvassa menetelmässä.

Luottamustasolla 99% voidaan havaita, ettei ylitysten määrät ole linjassa 95%:n ylitysten kanssa, mikä johtuu ylitysten vähyydestä. Ylityksiä IV-menetelmän käytössä ilmeni vain kaksi, joten on hyödytöntä yleistää 99%:n tuloksia.



### 5.2.3. Tehokkuus

Hyvän riskienhallintamenetelmän on oltava paitsi sopivan konservatiivinen ja tarkka, mutta myös samanaikaisesti tehokas. Tehokkuuden mittaamiseen käytetään tässä tuottosarjan ja eri menetelmien tuottamien VaR-ennusteiden välistä korrelaatiota. Mikäli korrelaatiot lasketaan sarjoista, jotka ovat eri jakaumista tai ovat samasta jakaumasta mutta eivät ole normaalisia, on sopivaa muuntaa havainnot järjestyslukuiksi. Järjestyslukusarja on täydellisesti tasajakautunut, sillä jokaisen arvon frekvenssi on yksi. Tämän jälkeen sarjoista lasketaan ei-parametrinen Spearmanin järjestyskorrelaatiokerroin vertaamalla tuottosarjan järjestyslukua  $d_t$  mallin  $i$  järjestyslukuun  $d_{it}$ .

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum_{t=1}^n (d_t - d_{it})^2}{n^3 - n}, \quad (5.6)$$

Korrelaation  $r$  tilastollisen merkitsevyyden selvittämiseksi testataan hypoteesia  $r \neq 0$  laskemalla testisuure

$$t^* = r_s \sqrt{\frac{n-2}{1-r_s^2}} \sim t_{n-2} \quad (5.7)$$

Taulukko 10. Tuottojen ja VaR-ennusteiden väliset järjestyskorrelaatiot

	r	t-arvo	p-arvo
MA	0,046	1,635	0,102
EWMA	0,039	1,388	0,165
GARCH1	0,040	1,402	0,161
GARCH2	0,034	1,197	0,232
IV2	0,028	0,993	0,321

Taulukosta 10. voidaan havaita, että kaikkien menetelmien korrelaatiot ovat tilastollisesti merkityksettömiä. Korrelaatiot eroavat suuresti Engel & Gizeykin (2001) sekä Hendricksin (1996) saamista tuloksista. Engel & Gizeycki (2001) eivät pitäneet portfolion koostumusta vakioisena tarkastelujakson ajan, mistä johtuen heidän tulokset eivät ole vertailukelpoisia tämän

tutkimuksen kanssa. Hendricksin (1996) tutkimuksessa portfolion koostumus säilytettiin muuttumattomana, joten hänen tulokset tarjoavat relevantin vertailupohjan. Hendricks (1996) raportoi sekä MA:n että EWMA:n VaR-ennusteiden ja tuottojen välisen korrelaation olevan tasolla 0.2, mikä on huomattavasti suurempi kuin tässä tutkimuksessa. Koska VaR on volatiliteetin lineaarinen funktio, on selvää, että volatiliteettimallin selitysaste vaikuttaa osaltaan VaR:n tehokkuuteen. On kuitenkin syytä korostaa, että hyväkin volatiliteettimalli saattaa tuottaa tehottomia VaR-ennusteita, sillä tehokkaiden VaR-estimaattien ennustaminen vaatii myös tuoton odotusarvon huomioimisen. Jos esimerkiksi hetkellä  $(t-1)$  markkinoilla koetaan suuri positiivinen shokki, ennustavat heteroskedastiset mallit suurta volatiliteettia eli reservipääoman kasvua hetkelle  $t$ . Jos kuitenkin hetkellä  $t$  koetaan jälleen suuri positiivinen tuotto, ovat volatiliteettimallit ennustaneet volatiliteettia tarkasti, mutta korrelaatio tuoton ja VaR:n välillä on negatiivinen. Koska tehokkailla markkinoilla ei ole mahdollista mallintaa odotusarvoa, on siis teoriassa mahdotonta saavuttaa VaR:n ja tuottojen välille korkeaa korrelaatiota.

Korrelaation lisäksi voidaan tehokkuuden tarkastelussa tutkia sitä, kuinka usein VaR eli reservipääoman määrä pienenee, kun markkinoilla havaitaan positiivinen tuotto, ja kuinka usein VaR-ennuste kasvaa, kun markkinoilla kohdataan negatiivinen tuotto. Näiden onnistuneiden VaR:n muutosten suhteellinen osuus  $T:n$  havainnon aikasarjassa voidaan laskea seuraavasti:

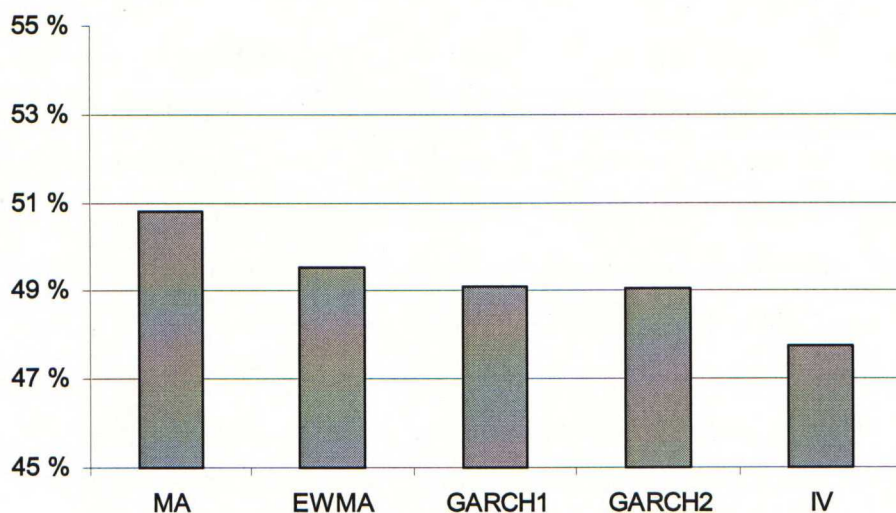
$$P = \frac{\sum_{i=1}^T D_i}{T}, \text{ jossa} \quad (5.8)$$

$$D_i = \begin{cases} 1 & \text{jos } VaR_t > VaR_{t-1} \text{ ja } r_t < 0 \\ 0 & \text{muuten} \end{cases}$$

Kuviosta 10. nähdään, että IV-estimaatteja lukuunottamatta eri volatiliteettimenetelmät onnistuvat vain noin 50% todennäköisyydellä liikkumaan markkinoiden kanssa oikeasuuntaisesti. IV:n perusteella tehdyt muutokset reservipääomaan ovat oikeasuuntaisia 47.8%:ssa tapauksista, mikä on linjassa korrelaatiosta saatujen tulosten kanssa.



Kuvio 10. Tuottojen kanssa oikeansuuntaisten reservipääoman muutosten osuus.



Tulokset heijastavat myös markkinoiden tehokkutta, sillä jos jokin volatilitietin ennustusmenetelmä olisi tuottanut oikeansuuntaisia reservipääoman muutosennusteita selvästi yli 50% todennäköisyydellä, olisi markkinoiden tehokkuus asetettava kyseenalaiseksi. Tulokset osoittavat myös, ettei muutoksia reservipääomaan kannata välttämättä tehdä päivittäin, jollei ole varmaa odotusta tuoton positiivisuudesta tai negatiivisuudesta.

## 6. Johtopäätökset

Tutkimuksessa on esitelty rahoitusmarkkinoiden volatiliteetin tyypillisimpiä tilastollisia ominaisuuksia. Volatiliteetin on havaittu olevan jaksollista, keskiarvoon hakeutuvaa sekä asymmetristä. Myös eksogeenisten muuttujien on osoitettu selittävän tulevaa volatiliteettia (Engle 2001). ARCH- ja GARCH-mallien on lukuisissa tutkimuksissa havaittu pystyvän mallintamaan tehokkaasti neliöidyissä tuotoissa piilevää autokorrelaatiota, mikä aiheuttaa volatiliteetin jaksollisuuden. EWMA on Riskmetricsin (1996) esittämä rakenteeltaan IGARCH mallia muistuttava tuottosarjan heteroskedastisuutta huomioiva malli. EWMA:n käytännöllisyyttä puoltaa se, että mallissa on vain yksi estimoitava parametri, jolle on päivätason ennusteissa havaittu arvopaperilajista tai markkinoista riippumaton stabiili arvo. Tuottosarjan asymmetrian mallintamiseen Engle & Ng (2001) suosittelevat EGARCH- ja GJR-malleja.

Edellä esiteltyjen historiasta estimoitujen mallien vaihtoehtona voidaan pitää optiomarkkinoiden implisiittistä volatiliteettia. Implisiittisen volatiliteetin tulisi antaa tehokkailla markkinoilla oikeata optiohinnoittelumallia käytettäessä harhaton estimaatti tulevasta vaihtelusta. Black & Scholes-malli sisältää kuitenkin ongelmia, sillä se olettaa jatkuva-aikaisen tuottoprosessin, jonka varianssi säilyy ajassa vakiona. Koska rahoitusmarkkinoiden tuottosarjat ovat heteroskedastisia, jolloin jakauma ei ole normaalijakautunut, on implisiittisen volatiliteetin harhattomuus kyseenalaista. Mallin heikkous voidaan havaita volatility-smile ilmiöstä, jossa eri toteutushintojen optioiden implisiittiset volatiliteetit ovat erisuuruisia. Hentschel (2002) osoittaa, että implisiittisen volatiliteetin harhaisuus saattaa aiheutua myös mittausvirheistä. Volatility-smile efektin ja mittausvirheiden minimoimiseksi ovat muutamat johdannaisten markkinapaikat rakentaneet volatiliteetti-indeksejä. Indeksit rakennetaan useista myynti- ja osto-optioista siten, että kulloinkin indeksiin kuuluvien optioiden toteutushintojen etäisyys niiden kohdetuotteen markkinahinnasta on mahdollisimman pieni. Indeksien koostumusta päivitetään myös sen mukaan, että indeksin maturiteetti säilyy jatkuvasti vakioisena.

Tässä tutkimuksessa pyrittiin selvittämään historiallisten volatiliteettimallien ja implisiittisen volatiliteetin käyttömahdollisuuksia parametrisessä VaR-estimoinnissa. Tutkimusaineistona käytettiin Nasdaq-100 indeksiä sekä Nasdaq-100 indeksin optioiden implisiittisistä



volatiliteeteista muodostettua VXN-indeksiä ajanjaksolta 1998-2002. Historiallisista volatiliteettimalleista käytettiin yksinkertaisena vertailumallina liukuvan keskiarvon menetelmän tuottamia ennusteita. Volatiliteetin jaksollisuuden huomioimiseksi estimoitiin kaksi GARCH-mallia. GARCH1-malli estimoitiin tarkastelujaksoa edeltäneeltä viiden vuoden periodilta ja GARCH2-malli varsinaiselta havaintojaksolta. Asymmetrian huomioimiseksi yritettiin estimoida EGARCH- ja GJR-mallit, mutta diagnostiset tarkistukset paljastivat neliöityyn tuottosarjaan jäävän tilastollisesti merkitsevää autokorrelaatiota. Mallien huono sopivus empiriaan saa tukea myös Danielssonin & Morimoton (2000) havainnoista. Jakauman asymmetrian havaittiin olevan epätasaisista, sillä osassa häntää on jakauman vasen häntä paksumpi kuin oikea, ja toisessa kohdassa on tilanne toisinpäin. Luultavasti tämä epätasaisuus häiritsi estimointia osaltaan.

Volatiliteettimallien ennustuskyvyn testauksessa havaittiin, ettei yksikään malli tuota täysin harhattomia ennusteita. Implisiittinen volatiliteetti osoittautui olevan vähiten harhainen ja tuottavan selvästi tarkempia ennusteita kuin historialliset mallit. Implisiittisen volatiliteetin ei kuitenkaan voida katsoa sisältävän kaikkea saatavilla olevaa informaatiota, sillä naiivi liukuvan keskiarvon malli näyttäisi tuovan volatiliteetin ennustamiseen tilastollisesti merkitsevää selitysvoimaa. Varmaa selitystä ilmiölle on vaikea antaa, mutta on mahdollista, että MA-malli tuo jotain sellaista lisäinformaatiota pitkän ajan dynamiikasta, jota heteroskedastiset mallit ja yleinen markkinaodotus eivät huomioi. Mallit rakennettiin päiväaineistosta, mikä tuottaa tutkimusten mukaan usein melko alhaisia selityssasteita (Poon & Granger, tulossa). Poon & Granger tähdentävät, että päivähavaintoihin verrattuna tiheän frekvenssin aineistoilla tehdyt ennusteet parantavat selityssastetta jopa 3-4 kertaisiksi.

VaR-estimoinnissa konservatiivisuutta tutkittiin ennusteiden keskimääräisellä suhteellisella harhaisuudella sekä ennusteiden keskihajonnalla. Tulokset osoittavat GARCH-mallien ja implisiittisen volatiliteetin tuottavan konservatiivisimpia VaR-ennusteita.

Tarkkuuden mittarina käytettiin ylitysten määrää sekä keskimääräisen ylityksen suuruutta suhteessa VaR-ennusteeseen. MA- sekä EWMA-menetelmät tuottivat tilastollisesti merkitsevän tarkkoja ennusteita, kun muut mallit osoittautuivat yliarvioivan tulevaa markkinariskiä. Tulosta voidaan selittää jakauman positiivisella vinoudella, mikä tarkoittaa, että jakauman oikea häntä

pidempi kuin vasen. Koska GARCH-mallit ja implisiittinen volatilitiitti tuottavat konservatiivisimpia ennusteita, on näissä menetelmissä VaR:n ylitykset luonnollisesti pienempiä kuin MA- ja EWMA-menetelmissä.

VaR-ennusteiden tehokkuutta mitattiin VaR:n ja toteutuneen tuoton välisellä korrelaatiolla. Yhdenkään menetelmän tuottamat ennusteet eivät korreloineet tuottosarjan kanssa merkitsevästi. Hendricks (1996) raportoi VaR-ennusteiden ja tuottojen välisen korrelaation olevan 0.2 tasolla, mikä on tilastollisesti merkitsevää. Tulos on yllättävä, sillä sehän implikoi VaR-ennusteiden pystyvän ennustamaan tulevia tuottoja, mikä näin rikkoo markkinatehokkuuden hypoteesia.

Yleisellä tasolla tämän tutkimuksen tulokset osoittavat, että vaikka heteroskedastiset mallit huomioivat huipukkuudesta johtuvaa häntien paksuutta, olisi riskienhallinnan liiketaloudellisen tehokkuuden kannalta tärkeää pystyä huomioimaan myös tuottojakauman vinoutta. Tarkastelujaksolla jakauman vasen häntä oli oikeaa häntää ohuempi, mikä aiheutti GARCH-mallien ja implisiittisen volatilitiitin ennusteiden epätarkkuuden. Jos vinous olisi negatiivista, mikä on rahoitusmarkkinoiden tuotoille tyypillisempää, olisivat tulokset VaR-estimoinnissa GARCH-mallien ja implisiittisen volatilitiitin osalta todennäköisesti parempia.

Jatkotutkimuksissa olisi mielenkiintoista syventyä markkinoiden mikrorakenteen tutkimiseen ja tutkia tiheän frekvenssin aineiston tuomia hyötyjä. Hyödyllistä olisi myös selvittää ajankohdalle ehdollisen vinouden mallintamisen mahdollisuuksia riskienhallinnassa..



## Lähteet

Aragónés, J.L., Blanco, C., Dowd, K. 2000. Extreme Value VaR. *Derivatives Week*. March 20. 8-9.

Basel Committee on Banking Supervision. 1996. Amendment to the capital accord to incorporate market risks. *Basel Committee Publications* no. 24.

Bollerslev, T. 1986. Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. *Journal of Econometrics* 31:3. 307-327.

Bollerslev, T. & Andersen, T.G. 1998. DM-Dollar Volatility: Intraday Activity Patterns, Macroeconomic Announcements, and Longer-Run Dependencies. *The Journal of Finance* 53:1. 219-265.

Canina, L., Figlewski, S. 1993. The Informational Content of Implied Volatility. *Review of Financial Studies* 6:3. 659-681.

Chen, J., Hong, H., Stein, J.C. 2001. Forecasting crashes: trading volume, past returns, and conditional skewness in stock prices. *Journal of Financial Economics* 61:3. 345-381.

Christoffersen P. & Diebold, F. 2000. How Relevant is Volatility Forecasting for Financial Risk Management. *The Review of Economics and Statistics* 82:1. 12-22.

Corhay, A. & Rad, T. 1994. Statistical Properties of Daily Returns: Evidence from European Stock Markets. *Journal of Business Finance & Accounting* 21:2. 271-282.

Daniel, K., Hirshleifer, D., Subrahmanyam, A. 1998. Investor Psychology and Security Market Under- and Overreactions. *The Journal of Finance* 53:6. 1839-1885.

- Danielsson, J. & Morimoto, Y. 2000. Forecasting Extreme Financial Risk: A Critical Analysis of Practical Methods for the Japanese Market. *Institute for Monetary and Economic Studies publications* 18:2. 25-48.
- Danielsson, J., Embrechts, P., Goodhart, C., Keating, C., Muennich, F., Renault, O., Shin, H.S. 2001. An Academic Response to Basel II. *London School of Economics Financial Markets Group Special Paper no. 130*.
- Davidson, W.N., Kim, J.K., Ors, E., Szakmary, A. 2001. Using implied volatility on options to measure the relation between asset returns and variability. *Journal of Banking & Finance* 25:7. 1245-1269.
- Dowd, K. 1998. *Beyond Value At Risk – The New Science of Risk Management*. John Wiley & Sons Ltd, England.
- Engel, J. & Giszky, M. 1999. Conservatism, Accuracy and Efficiency: Comparing Value-at-Risk Models. *Australian Prudential Regulation Authority Working Paper 2*.
- Engle, R. 1982. Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. *Econometrica* 50:4. 987-1008.
- Engle, R. 1993. Statistical Models for Financial Volatility. *Financial Analyst Journal* 49:1. 72-78.
- Engle, R. & Ng, V. 1993. Measuring and Testing the Impact of News on Volatility. *Journal of Finance* 48:5. 1749-1778.
- Engle, R. & Patton, A. 2001. What Good Is a Volatility Model. *Quantitative Finance* 1:2. 237-245.
- Fama, E. 1965. The Behaviour of Stock-Market Prices. *The Journal of Business* 38:1. 34-105.



Gourieroux, C. 2001. *Financial Econometrics: Problems, Models and Methods*. Princeton University Press, Princeton.

Glosten, L.R., Jagannathan, R., Runkle, D.E. 1993. On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks. *The Journal of Finance* 48:5. 1779-1801

Godambe, V.P. 1991. *Estimating Functions*. Oxford University Press. Oxford.

Guermat, C. & Harris, R. 2002. Forecasting value at risk allowing for time variation in the variance and kurtosis of portfolio returns. *International Journal of Forecasting* 18. 409-419.

Hendricks, D. 1996. Evaluation of Value-at-Risk Models Using Historical Data. *Federal Reserve Bank of New York Economic Policy Review* / April. 39-70.

Hentschel, L. tulossa. Errors in Implied Volatility Estimation. Ilmestyy lehdessä *Journal of Financial and Quantitative Analysis*.

Hong, H. & Stein, J.C. 1999. Differences of opinion, rational arbitrage and market crashes. *NBER Working Paper* 7376.

Jorion, P. 1995. Predicting Volatility in the Foreign Exchange Market. *The Journal of Finance* 1:2. 507-528.

Jorion, P. 2001. *Value at Risk : The new benchmark for managing financial risk*. McGraw-Hill, New York.

JP Morgan 1996. *Riskmetrics™ - Technical Document*. 4<sup>th</sup> Edition. New York.

Kahra, H. & Kanto, A. 1999. *Aikasarjaekonometria*. Opetusmoniste.

Lamoureux, C.G., Lastrapes, W.D. 1993. Forecasting Stock-Return Variance: Toward an Understanding of Stochastic Implied Volatilities. *Review of Financial Studies* 6:2. 293-326.

Li, D. 1999. Value at Risk Based on the Volatility Skewness and Kurtosis. *RiskMetrics working paper*.

Manganelli, S. & Engle, R. 2001. Value at Risk Models in Finance. *European Central Bank Working Papers* 75. 1-40.

Nelson, D. 1991. Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach. *Econometrica* 59:2. 347-370.

Polasek W. & Pojarliev M. 2001. VaR Evaluations Based on Volatility Forecasts of GARCH Models. *Basel University working paper* 2.

Poon, S.-H. & Granger, C. Tulossa kesäkuussa 2003. Forecasting Volatility in Financial Markets: A Review. Ilmestyy lehdessä *Journal of Economic Literature*.

Santis, G. & Imrohoroğlu, S. 1997. Stock returns and volatility in emerging financial markets. *Journal of International Money and Finance* 16:4. 561-579.

Schwert, W. & Seguin, P. 1990. Heteroskedasticity in Stock Returns. *The Journal of Finance* 45:4. 1129-1155.

Schwert, W. 2002. Stock volatility in the new millennium: how wacky is Nasdaq?. *Journal of Monetary Economics* 49:1. 3-26.

Szakmary, A., Ors, E., Kim, J.K., Davidson III, W.N. Tulossa. The predictive power of implied volatility: Evidence from 35 futures markets. Ilmestyy lehdessä *Journal of Banking & Finance*.



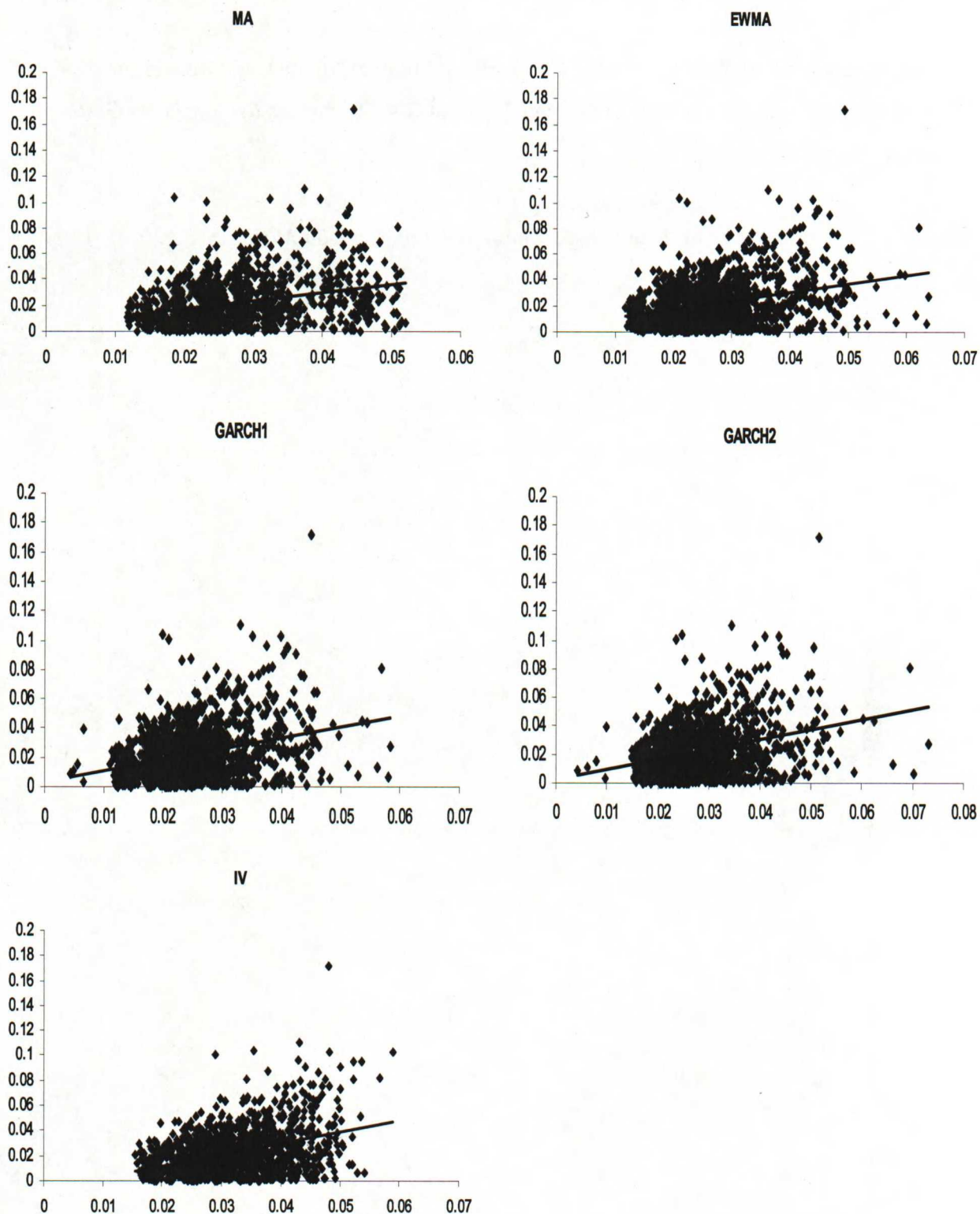
The Nasdaq Stock Market Inc. NASDAQ-100 Index.

[http://dynamic.nasdaq.com/dynamic/nasdaq100\\_activity.stm](http://dynamic.nasdaq.com/dynamic/nasdaq100_activity.stm). 2.4.2003

Théoret, R. & Rostan, P. 2000. Empirical Comparative Study of Monte Carlo Simulation Methods versus Historical Methods to estimate Value at Risk. *Centre de Recherche en Gestion Document 19*.

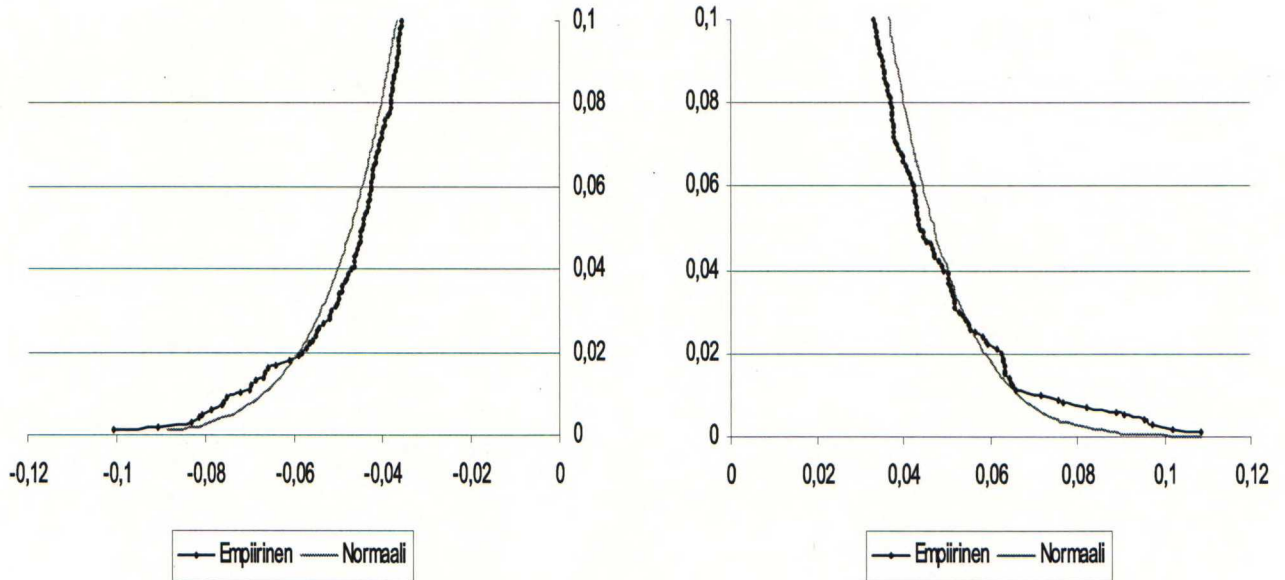
Whaley, R. 2000. The Investor Fear Gauge. *The Journal of Portfolio Management* 26. 12-17.

**Liite 1. Volatiliteettiennusteiden ja Nasdaq-100 indeksin toteutuneen volatiliteetin välinen korrelaatio**





## Liite 2. Empiirinen todennäköisyysjakauma vs. normaalijakauma



## Empiirisen todennäköisyysjakauman etäisyys normaalijakaumasta $p:n$ eri arvoilla

